

บทที่ 12

อนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ใช้ในวงจรไฟฟ้า

Fourier's Series and Their Applications in Electric Circuits

ในบทที่ผ่านมาเราได้ศึกษาผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบไซน์ชอยด์ ในบทนี้จะได้กล่าวถึงผลตอบสนองของวงจรต่อสัญญาณที่ไม่เป็นไซน์ชอยด์ โดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมทำการแทนสัญญาณที่ไม่เป็นไซน์ชอยด์เหล่านั้นด้วยอนุกรมที่เรียกว่า อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier's Series) ซึ่งจะประกอบด้วยผลรวมของสัญญาณไซน์ชอยด์หลายความถี่ที่สัมพันธ์กันเชิงฮาร์โมนิกส์ ทำให้เราสามารถแยกพิจารณาหาผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบไซน์ชอยด์แต่ละความถี่ โดยอาศัยพื้นฐานเดิมที่เรียนไปแล้ว จากนั้นรวมผลตอบสนองของแต่ละความถี่เข้าด้วยกัน เป็นผลตอบสนองต่อสัญญาณที่ไม่เป็นไซน์ชอยด์ที่กำลังพิจารณา

12.1 อนุกรมฟูรีเยร์

ในช่วงศตวรรษที่ 18 มีนักคณิตศาสตร์หลายคน รวมทั้งออยเลอร์ และเบอนูลลี ที่ทราบว่ารูปคลื่น $f(t)$ ใดๆ สามารถแทนโดยประมาณได้ด้วยผลรวมแบบมีน้ำหนักของไซน์ชอยด์ที่มีความถี่สัมพันธ์กันในเชิงฮาร์โมนิกส์ แต่เป็นฟูรีเยร์ที่ได้เสนอในปี ค.ศ. 1807 (พ.ศ. 2350) ว่า รูปคลื่นฟังก์ชันคาบใดๆ สามารถแตกย่อยเป็นอนุกรมอนันต์ของไซน์ชอยด์ ซึ่งเมื่อรวมเข้าด้วยกันจะสร้างสัญญาณเดิมกลับมาได้ พิจารณาฟังก์ชันคาบ

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (12.1)$$

สำหรับทุกค่าเวลา t และ T คือคาบซึ่งหมายถึงค่าที่น้อยที่สุดของ T ที่ทำให้สมการ (12.1) เป็นจริง

สมการสำหรับผลรวมจำกัดพจน์ของไซน์ชอยด์ที่มีความถี่สัมพันธ์กันในเชิงฮาร์โมนิกส์เรียกว่า อนุกรมฟูรีเยร์ คือ

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^N b_n \sin n\omega_0 t \quad (12.2)$$

หรือเขียนอีกแบบได้ว่า

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^N C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (12.3)$$

เมื่อ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ และ เลขจำนวนจริง a_0 a_n และ b_n คือสัมประสิทธิ์ตรีโกณของฟูเรียร์ (Fourier Trigonometric Coefficient) ในสมการ (12.3) ซึ่งเป็นการเขียนอีกรูปแบบหนึ่งจะได้ $C_0 = a_0$ ส่วนตัวเลขเชิงซ้อน $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ และ $\theta_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$

โดยทั่วไปจะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ a_0 a_n และ b_n ได้ง่ายกว่าการหาค่าสัมประสิทธิ์ C_n และ θ_n โดยเฉพาะในกรณีที่ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันสมมาตร แต่การใช้อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของ C_n และ θ_n จะช่วยให้การวิเคราะห์ผลตอบสนองในสภาวะคงตัวของวงจรเชิงเส้นต่อฟังก์ชันคาบทำได้สะดวกกว่า

พิจารณาสมการ (12.3) เมื่อ $n=1$ คือมีหนึ่งรอบในช่วงเวลา T จะได้ไซน์ซายด์ $C_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$ เรียกว่าพจน์หลักมูล (Fundamental Term) ความถี่ ω_0 เรียกว่าความถี่หลักมูล (Fundamental Frequency) สำหรับ $n=k$ คือมี k รอบในช่วงเวลา T จะได้ไซน์ซายด์ $C_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ เรียกว่าพจน์ฮาร์โมนิก (Harmonic Term) ความถี่ $k\omega_0$ เรียกว่าความถี่ฮาร์โมนิกที่ k^{th} (k^{th} Harmonic Frequency) เราสามารถแทนฟังก์ชัน $f(t)$ ให้ได้ความถูกต้องเท่าใดก็ได้โดยการเพิ่มจำนวนพจน์ในอนุกรมฟูเรียร์ เมื่อจำนวนพจน์เข้าสู่อนันต์อนุกรมฟูเรียร์จะแทนฟังก์ชันบางชนิดได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์

ธรรมชาติของรูปคลื่น จะขึ้นกับขนาดและเฟสของทุกส่วนประกอบฮาร์โมนิกส์ และเราจะได้เรียนรู้ว่าสามารถจะสร้างสัญญาณที่ไม่มีลักษณะเป็นไซน์ซายด์เลยจากการรวมฟังก์ชันไซน์ซายด์ที่เหมาะสม รูปคลื่น $f(t)$ จะแทนได้ด้วยสมการ (12.2) หรือ (12.3) เมื่อฟังก์ชันนั้นเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดียว (Single-Value Function) โดยอาจยกเว้นบางจุดที่มีจำนวนนับได้
2. ค่าอินทิกรัล $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty$ สำหรับทุกเวลา t_0
3. ในช่วงเวลาหนึ่งคาบ $f(t)$ มีจำนวนความไม่ต่อเนื่อง (Discontinuities) เป็นจำนวนนับได้
4. ในช่วงเวลาหนึ่งคาบ $f(t)$ มีจำนวนค่าสูงสุดและต่ำสุด (Maxima and Minima) เป็นจำนวนนับได้

ในการศึกษาต่อไปนี้จะพิจารณา $f(t)$ เพื่อแทนรูปคลื่นแรงดันหรือกระแส และค่าแรงดันหรือกระแสที่เราจะพิจารณานั้นจะมีคุณสมบัติทั้งสี่ข้อข้างต้นอย่างแน่นอน ดังนั้นเราจะถือว่าสัญญาณที่จะพิจารณาต่อไปนี้มีคุณสมบัติตามเงื่อนไขทั้งสี่ข้อเสมอ

ในทางวิศวกรรมไฟฟ้ามีสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันคาบมากมาย และสามารถแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ได้ เมื่อเราทราบฟังก์ชัน $f(t)$ ทำการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ เราจะสามารถแยกฟังก์ชันนั้นออกเป็นพจน์กระแสตรง a_0 บวกกับผลรวมของพจน์ไซน์ซายด์ที่อธิบายด้วยค่าสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n เราจะ

เลือกจำนวนพจน์ทั้งหมดเท่ากับ N เพื่อให้ได้ตัวแทนที่ดีของฟังก์ชัน $f(t)$ และให้ได้ระดับของค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้

จากการศึกษาแคลคูลัสเราทราบว่า ไขว้ชอยด์ที่มีความถี่เป็นจำนวนเท่าที่เป็นจำนวนเต็มของความถี่มูลฐาน $f_0 = 1/T$ จะสร้างเซตของฟังก์ชันตั้งฉาก (Orthogonal Function) คือ

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt = 0 \text{ สำหรับทุกค่าของ } n \text{ และ } m \quad (12.4)$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi nt}{T} \sin \frac{2\pi mt}{T} dt &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12.5)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการ (12.2) หาได้จาก

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (12.6)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (12.7)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (12.8)$$

ซึ่งจะได้แสดงให้เห็นต่อไปว่า สมการ (12.6)-(12.8) ได้มาจากการใช้ความสัมพันธ์ตั้งฉากในสมการ (12.4) และ (12.5) เช่น เพื่อหา a_k เราคูณสมการ (12.2) ด้วยแล้วอินทิเกรตทั้งสองด้าน จะได้

$$\int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t dt = \int_0^T a_0 \cos k\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^N \int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \cos k\omega_0 t dt \quad (12.9)$$

หาค่าด้านขวามือของสมการ (12.9) จะได้ว่าพจน์ที่ไม่เป็นศูนย์คือ กรณี $n = k$ ดังนั้น

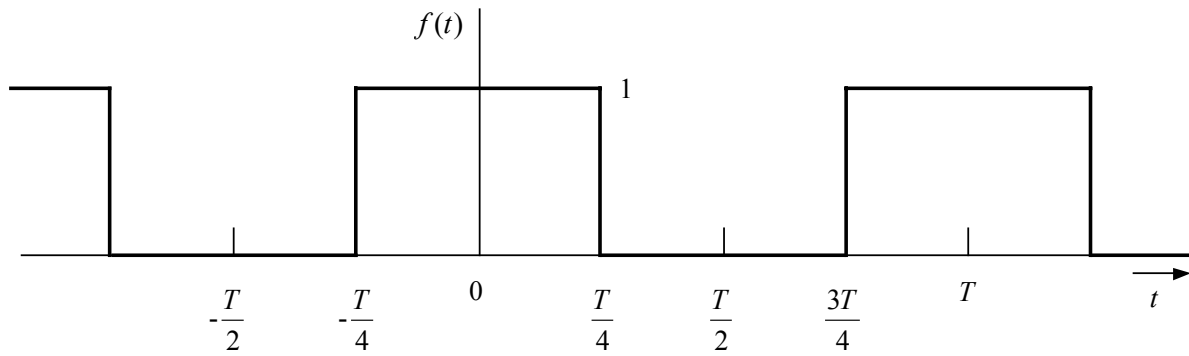
$$\int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t dt = a_k \left(\frac{T}{2} \right) \quad (12.10)$$

ย้ายข้างจะได้สมการ (12.7)

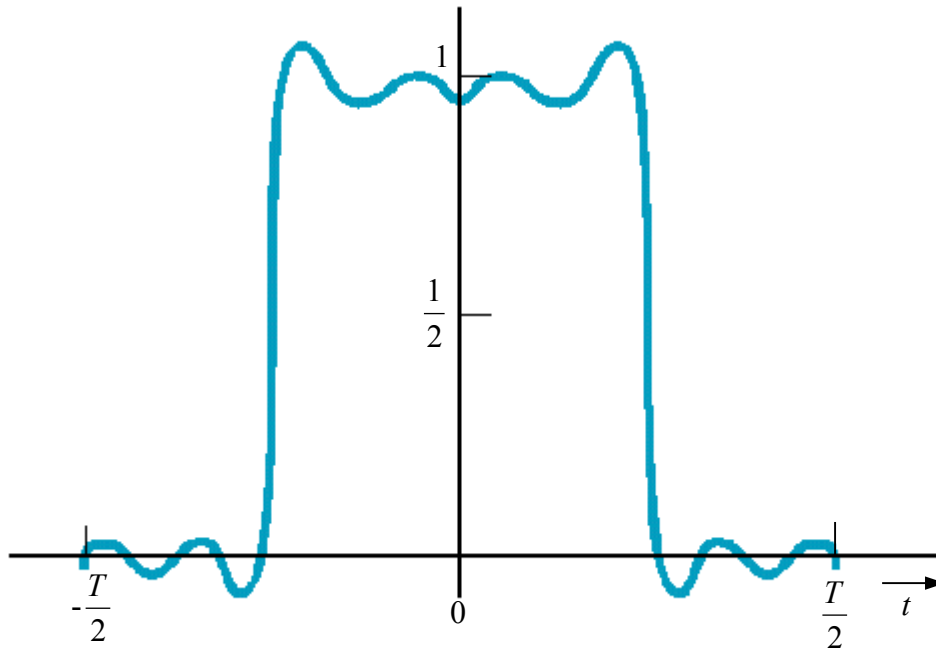
ตัวอย่าง 12.1 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคาบเรคแทงกูลาร์ดังแสดงในรูป Ex 12.1 (ก) จากนั้นเขียนค่าประมาณของรูปคลื่นนี้เมื่อ $N = 7$

วิธีทำ ค่าความถี่เชิงมุมพื้นฐานคือ

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



(ก)



(ข)

รูปที่ Ex 12.1

เราจะหาค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันคือ a_0 ก่อน โดยที่

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 1 dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

เราเลือกอินทิกรัลจาก $-T/2$ ถึง $T/2$ เพื่อความสะดวก และค่าของฟังก์ชันก็ไม่ใช่ศูนย์ในช่วง $-T/4$ ถึง $T/4$ เท่านั้น เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันคู่เนื่องจาก $f(t) = f(-t)$ หรือมีความสมมาตรรอบแกนตั้งที่เวลา $t = 0$ ดังนั้น จากสมการ (12.8) จะได้

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 1 \sin n\omega_0 t dt = 0 \end{aligned}$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์ b_n ทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ ส่วนค่า a_n หาจากสมการ (12.7) ได้

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 1 \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{2}{T\omega_0 n} \sin n\omega_0 t \Big|_{-T/4}^{T/4} \end{aligned}$$

แทนค่าช่วงเวลาของการอินทิเกรตจะได้

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{-\pi n}{2}\right) \right]$$

ค่าสัมประสิทธิ์ a_n จะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ n เป็นเลขคู่ หรือ $n = 2, 4, 6, \dots$ และจะมีค่า

$$a_n = \frac{2(-1)^q}{\pi n} \text{ เมื่อ } n = 1, 3, 5, \dots \text{ และ } q = (n-1)/2$$

ดังนั้นจะได้อนุกรมฟูเรียร์

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1, \text{odd}}^N \frac{2(-1)^q}{\pi n} \cos n\omega_0 t$$

แทนค่า n จาก 1 ถึง 7 จะได้

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \quad a_3 = \frac{-2}{3\pi} \quad a_5 = \frac{2}{5\pi} \quad \text{และ} \quad a_7 = \frac{-2}{7\pi}$$

ซึ่งจะเห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์ a_n ลดลงเมื่อค่า n เพิ่มมากขึ้น หรือมีค่าขึ้นกับ $1/n$ เช่นค่าสัมประสิทธิ์ของฮาร์โมนิกที่เจ็ดจะมีขนาดเพียง $1/7$ ของค่าสัมประสิทธิ์มูลฐาน a_1 รูปที่ Ex 12.1 (ข) แสดงค่าประมาณของรูปคลื่นนี้เมื่อ $N = 7$ จะเห็นว่ามีความแตกต่างจากฟังก์ชันเดิมอย่างเห็นได้ชัด อย่างไรก็ตามค่าประมาณนี้จะประยุกต์ใช้ได้หลายกรณี หากต้องการให้ใกล้เคียงมากขึ้นจะต้องเพิ่มพจน์ฮาร์โมนิกส์เข้ามาอีก โดยอาจพิจารณาจากค่าเบี่ยงเบนของขนาดของฮาร์โมนิกนั้นต่อค่าสัมประสิทธิ์มูลฐาน a_1 เช่น ฮาร์โมนิกที่เก้าจะมีขนาดเพียง $1/9$ หรือ ประมาณ 11 % ของค่าสัมประสิทธิ์มูลฐาน a_1 ดังนั้นหากต้องการรวมฮาร์โมนิกส์ที่มีขนาดไม่น้อยกว่า 10 % ก็จะต้องรวมฮาร์โมนิกที่เก้าด้วย เป็นต้น

12.2 ฟังก์ชันสมมาตร

ความสมมาตรของฟังก์ชันสามารถแบ่งออกได้เป็นสี่แบบ ซึ่งสามารถนำมาใช้ประกอบทำให้การหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ทำได้ง่ายขึ้น

1. ความสมมาตรฟังก์ชันคู่ (Even-Function Symmetry)
2. ความสมมาตรฟังก์ชันคี่ (Odd-Function Symmetry)
3. ความสมมาตรครึ่งคลื่น (Half-Wave Symmetry)

4. ความสมมาตรหนึ่งในสี่คลื่น (Quarter-Wave Symmetry)

ฟังก์ชันใดๆ จะเป็นฟังก์ชันคู่เมื่อ $f(t) = f(-t)$ และฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันคี่เมื่อ $f(t) = -f(-t)$ สำหรับฟังก์ชันคู่ ดังในตัวอย่าง 12.1 ค่าสัมประสิทธิ์ b_n จะมีค่าเป็นศูนย์ และ

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

สำหรับฟังก์ชันคี่ ค่าสัมประสิทธิ์ a_n จะมีค่าเป็นศูนย์ และ

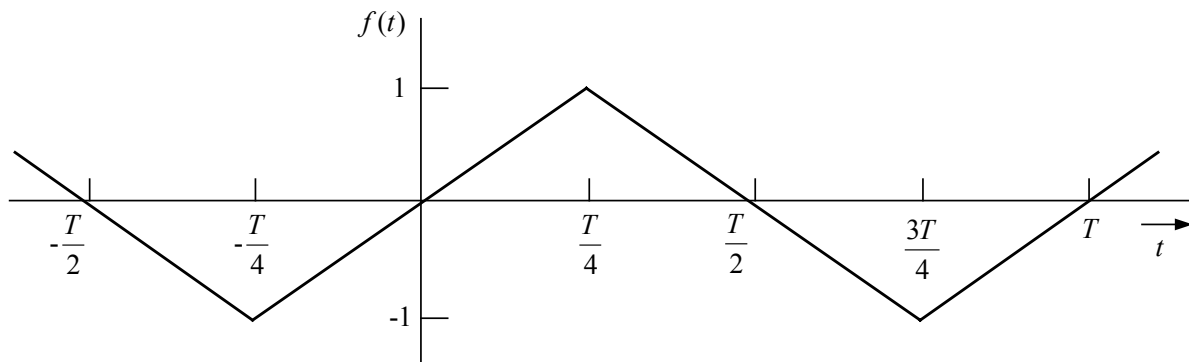
$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

ตัวอย่างฟังก์ชันคี่คือ $\sin \omega_0 t$ และฟังก์ชันในรูปที่ 12.1

ฟังก์ชันใดๆจะมีคุณสมบัติความสมมาตรครึ่งคลื่นเมื่อ

$$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

นั่นคือฟังก์ชันเหล่านี้จะมีครึ่งหลังของแต่ละคาบเหมือนครึ่งแรกที่ถูกคว่ำกลับบนลงล่างและล่างขึ้นบน ดังฟังก์ชันตัวอย่างในรูปที่ 12.1 เมื่อฟังก์ชันมีคุณสมบัติความสมมาตรครึ่งคลื่นแล้วจะได้ค่าเฉลี่ย $a_0 = 0$ และทั้งค่า a_n และ b_n เป็นศูนย์สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่



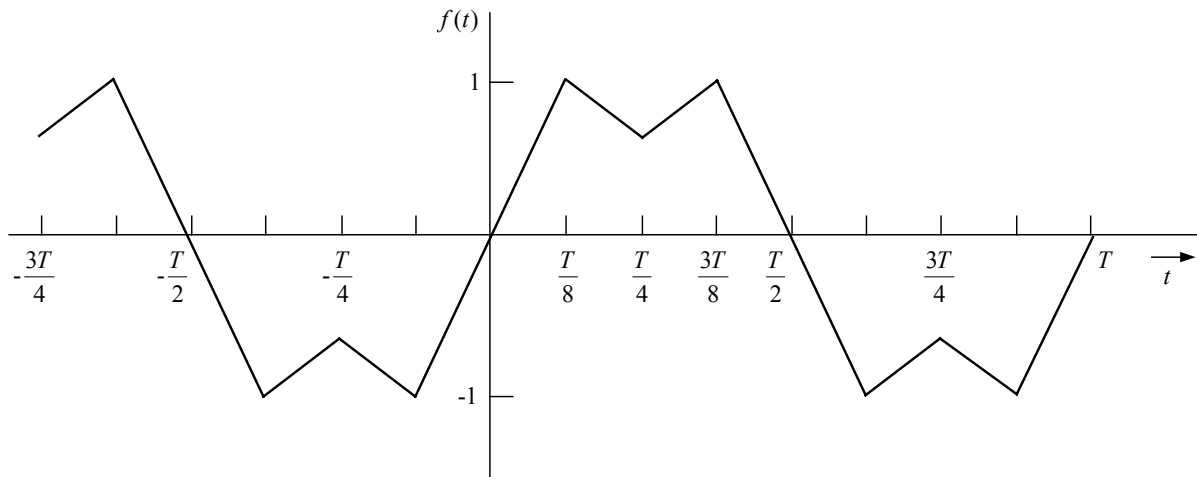
รูปที่ 12.1 ตัวอย่างฟังก์ชันคี่ที่มีคุณสมบัติความสมมาตรครึ่งคลื่น

คุณสมบัติความสมมาตรหนึ่งในสี่คลื่นจะใช้กับฟังก์ชันที่นอกจากจะมีคุณสมบัติความสมมาตรครึ่งคลื่นแล้วยังมีความสมมาตรรอบจุดกึ่งกลางของครึ่งคลื่นบวกและครึ่งคลื่นลบ รูปที่ 12.2 แสดงตัวอย่างฟังก์ชันคี่ที่มีคุณสมบัติความสมมาตรหนึ่งในสี่คลื่นด้วย ถ้าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคี่และมีคุณสมบัติความสมมาตรหนึ่งในสี่คลื่นจะได้ $a_0 = 0$ $a_n = 0$ สำหรับทุกค่าของ n และ b_n เป็นศูนย์สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่ สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่จะได้

$$b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

แต่ถ้าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคู่และมีคุณสมบัติความสมมาตรหนึ่งในสี่คลื่นจะได้ $a_0 = 0$ $b_n = 0$ สำหรับทุกค่าของ n และ a_n เป็นศูนย์สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่ สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่จะได้

$$a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$



รูปที่ 12.2 ตัวอย่างฟังก์ชันคี่ที่มีคุณสมบัติความสมมาตรหนึ่งในสี่คลื่น

ตาราง 12.1 สรุปการหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติความสมมาตรแบบต่างๆ

ตาราง 12.1 การหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติความสมมาตร

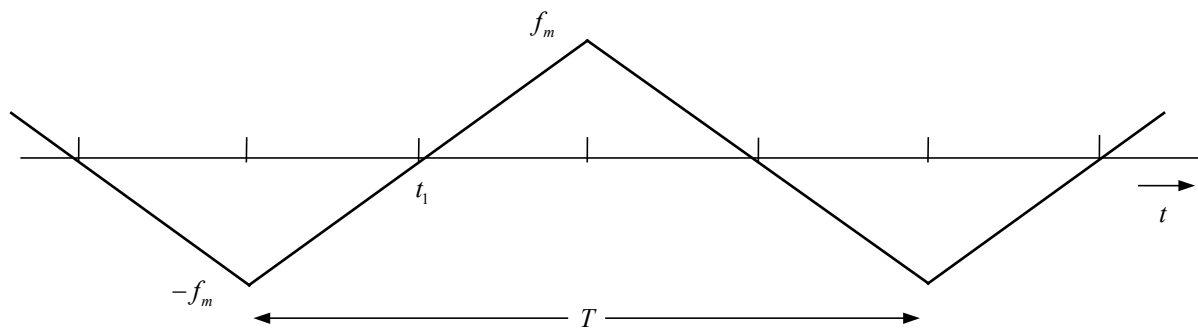
ความสมมาตร	ค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์
1. ฟังก์ชันคี่ $f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$ สำหรับทุกค่าของ n $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$
2. ฟังก์ชันคู่ $f(t) = f(-t)$	$b_n = 0$ สำหรับทุกค่าของ n $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$
3. ครึ่งคลื่น $f(t) = -f(t - T/2)$	$a_0 = 0$ $a_n = 0$ เป็นศูนย์สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่ $b_n = 0$ เป็นศูนย์สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่ $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่ $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่

ความสมมาตร	ค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์
4. หนึ่งในสี่คลื่น คือมีคุณสมบัติความสมมาตรครึ่งคลื่นและมีความสมมาตรรอบจุดกึ่งกลางของครึ่งคลื่นบวกและครึ่งคลื่นลบ	(ก) ฟังก์ชันคี่ $a_0 = 0$ $a_n = 0 \text{ สำหรับทุกค่าของ } n$ $b_n \text{ เป็นศูนย์สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคู่}$ $b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt \text{ สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคี่}$ (ข) ฟังก์ชันคู่ $a_0 = 0$ $b_n = 0 \text{ สำหรับทุกค่าของ } n$ $a_n \text{ เป็นศูนย์สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคู่}$ $a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt \text{ สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคี่}$

ตัวอย่าง 12.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคาบไตรแองกูลาร์ดังแสดงในรูป Ex 12.2 จากนั้นหาค่าจำนวนพจน์ N โดยที่ค่าประมาณของรูปคลื่นนี้จะรวมพจน์ที่มีขนาดมากกว่า 2 % ของพจน์มูลฐาน

วิธีทำ เราจะใช้คุณสมบัติความสมมาตรช่วยในการหาค่าสัมประสิทธิ์ให้มากที่สุด จากรูปจะเห็นว่าฟังก์ชันมีคุณสมบัติความสมมาตรหนึ่งในสี่คลื่น ดังนั้น จาก $T = \pi/2$ จะได้

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4 \text{ rad/s}$$



รูปที่ Ex 12.2

ใช้ตาราง 12.1 หาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันคี่ที่มีคุณสมบัติความสมมาตรหนึ่งในสี่คลื่น ได้ $a_0 = 0$ $a_n = 0$ สำหรับทุกค่าของ n b_n เป็นศูนย์สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่ และ

$$b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt \text{ สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคี่}$$

เขียนสมการของฟังก์ชัน

$$f(t) = \frac{f_m}{T/4}t = \frac{4f_m}{T}t \quad 0 \leq t \leq T/4$$

แทนค่า $T = \pi/2$ และ $f_m = 4$ จะได้

$$f(t) = \frac{32}{\pi}t \quad 0 \leq t \leq T/4$$

ดังนั้น สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่ จะได้

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{8}{T} \left(\frac{32}{\pi} \right) \int_0^{T/4} t \sin n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{512}{\pi^2} \left[\frac{\sin n\omega_0 t}{n^2 \omega_0^2} - \frac{t \cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right]_0^{T/4} \\ &= \frac{32}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

จะได้อนุกรมฟูเรียร์

$$f(t) = 3.24 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t \quad \text{สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคี่}$$

เขียนสี่พจน์แรกที่ไม่เป็นศูนย์ คือ $n = 1, 3, 5, 7$ จะได้

$$f(t) = 3.24 \left(\sin 4t - \frac{1}{9} \sin 12t + \frac{1}{25} \sin 20t - \frac{1}{49} \sin 28t \right)$$

พจน์ถัดไปคือ $n = 9$ จะได้ค่าขนาด $3.24/81 = 0.04$ ซึ่งน้อยกว่า 2 % ของ 3.24 (a_1) ดังนั้นเราจะประมาณรูปคลื่นนี้โดยใช้ $N = 7$

12.3 อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอกโปเนนเชียล

รูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ในสมการที่ (12.2) เรียกว่ารูปแบบไซน์-โคไซน์ หรือรูปแบบเรกแทนกูลาร์ อีกรูปแบบหนึ่งของอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^N C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (12.11)$$

เมื่อ C_0 คือค่าเฉลี่ยของฟังก์ชัน $f(t)$ มีค่าเท่ากับ a_0 ส่วนตัวเลขเชิงซ้อน

$$C_n = \frac{(a_n - jb_n)}{2} = C_n \angle \theta_n$$

โดยที่

$$C_n = |C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$$

และ

$$\theta_n = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & a_n > 0 \\ 180^\circ - \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) & a_n < 0 \end{cases}$$

หรือ

$$a_n = 2C_n \cos \theta_n \text{ และ } b_n = 2C_n \sin \theta_n$$

เขียน $\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ ในรูปเอกโปเนนเชียลโดยใช้สมการออยเลอร์ ($\cos \beta = 1/2(e^{j\beta} + e^{-j\beta})$) และ $N = \infty$ จะได้

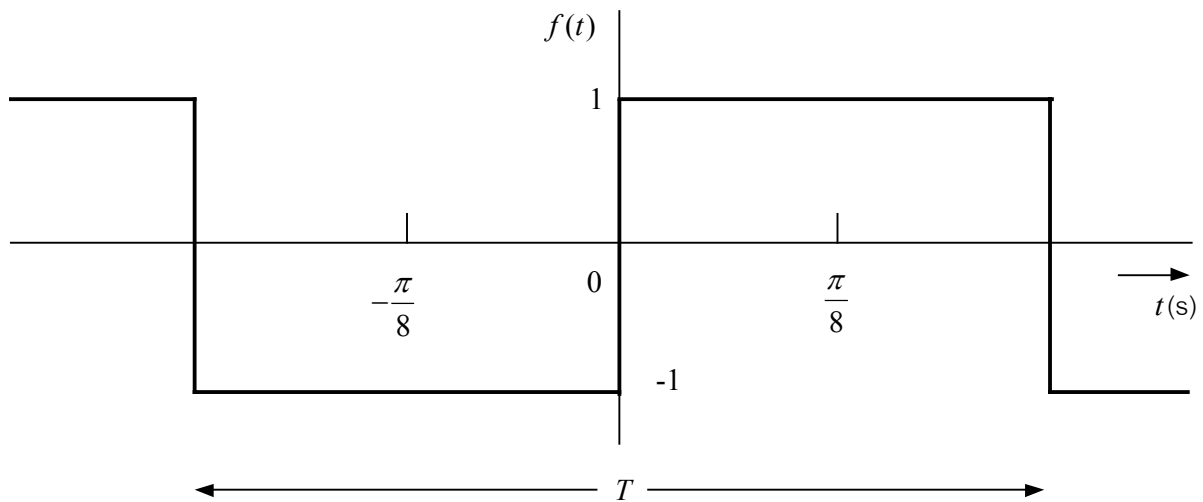
$$f(t) = C_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (12.12)$$

เมื่อ C_n คือสัมประสิทธิ์เชิงซ้อนมีค่า

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (12.13)$$

นอกจากนี้ ค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ n เป็นลบจะเท่ากับคอนจูเกตของสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ n เป็นบวก $C_n = C_{-n}^*$

ตัวอย่าง 12.3 จงหาอนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนของฟังก์ชันแสดงในรูป Ex 12.3



รูปที่ Ex 12.3

วิธีทำ จากรูปจะได้ว่าค่าเฉลี่ยของ $f(t)$ เป็นศูนย์ ดังนั้น $C_0 = 0$ และฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันคู่ ใช้สมการ

(12.13) เลือกค่า $t_0 = -\frac{T}{2}$ และนิยาม $jn\omega_0 = m$ จะได้

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} -Ae^{-mt} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} Ae^{-mt} dt + \frac{1}{T} \int_{T/4}^{T/2} -Ae^{-mt} dt \\
&= \frac{A}{mT} \left(e^{-mt} \Big|_{-T/2}^{-T/4} - e^{-mt} \Big|_{-T/4}^{T/4} + e^{-mt} \Big|_{T/4}^{T/2} \right) \\
&= \frac{A}{jn\omega_0 T} \left(2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{jn\pi} \right) \\
&= \frac{A}{2\pi n} \left(4 \sin \frac{n\pi}{2} - 2 \sin(n\pi) \right) = \begin{cases} 0 & \text{for even } n \\ \frac{2A}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} & \text{for odd } n \end{cases} \\
&= A \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

โดยที่ $x = \frac{n\pi}{2}$ และเนื่องจาก $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์เชิงซ้อน C_n จะมีค่าเป็นเลขจำนวนจริง และ $C_n = 0$ สำหรับค่า n ที่เป็นเลขคู่
สำหรับ $n=1$ เราได้

$$C_1 = \frac{A \sin \pi/2}{\pi/2} = \frac{2A}{\pi} = C_{-1}$$

สำหรับ $n=2$ จะได้

$$C_2 = A \frac{\sin \pi}{\pi} = 0 = C_{-2}$$

และสำหรับ $n=3$

$$C_3 = \frac{A \sin(3\pi/2)}{3\pi/2} = \frac{-2A}{3\pi} = C_{-3}$$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนของฟังก์ชันนี้คือ

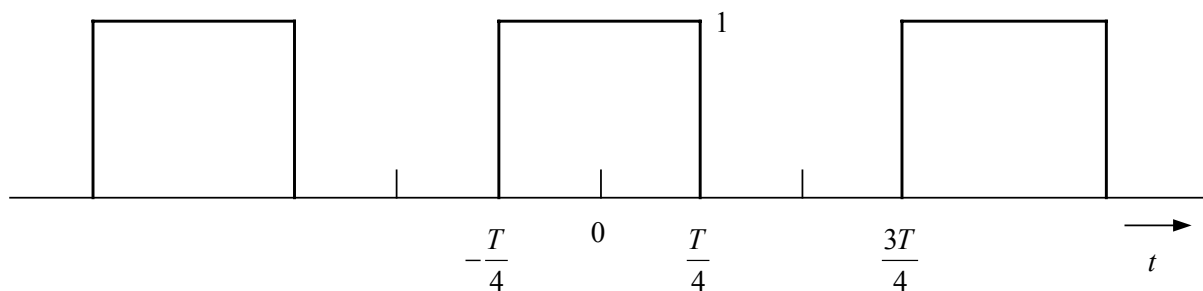
$$\begin{aligned}
f(t) &= \dots + \frac{-2A}{3\pi} e^{-j3\omega_0 t} + \frac{2A}{\pi} e^{-j\omega_0 t} + \frac{2A}{\pi} e^{j\omega_0 t} + \frac{-2A}{3\pi} e^{j3\omega_0 t} + \dots \\
&= \frac{2A}{\pi} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \frac{-2A}{3\pi} (e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}) + \dots \\
&= \frac{4A}{\pi} \cos \omega_0 t - \frac{4A}{3\pi} \cos 3\omega_0 t + \dots \\
&= \frac{4A}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{odd}}}^{\infty} \frac{(-1)^q}{n} \cos n\omega_0 t
\end{aligned}$$

เมื่อ $q = \frac{n-1}{2}$ สังเกตว่าอนุกรมนี้เริ่มจาก $n = -\infty$ ถึง $n = +\infty$ เราทราบว่าค่าแรงดันและกระแสทุกค่าของวงจรใดๆ เป็นฟังก์ชันเลขจำนวนจริง สำหรับฟังก์ชันเลขจำนวนจริง $f(t)$ ใดๆ จะได้

$$|C_n| = |C_{-n}|$$

ถ้าเราทราบว่าฟังก์ชันที่กำลังพิจารณาเป็นฟังก์ชันเลขจำนวนจริง เราจะหาค่าเฉพาะ n เป็นบวกเท่านั้น นอกจากนี้หากฟังก์ชันเลขจำนวนจริงมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันคี่ด้วย จะได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์เชิงซ้อน C_n จะมีค่าเฉพาะส่วนจินตภาพเท่านั้น

ตัวอย่าง 12.4 จงหาอนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนของฟังก์ชันสี่เหลี่ยมแสดงในรูป Ex 12.4



รูปที่ Ex 12.4

วิธีทำ ใช้สมการ (12.13) และนิยาม $j\omega_0 = m$ จะได้

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 1e^{-mt} dt \\ &= \frac{1}{-mT} e^{-mt} \Big|_{-T/4}^{T/4} \\ &= \frac{1}{-mT} (e^{-mT/4} - e^{+mT/4}) \end{aligned}$$

แทนค่า $m = j\omega_0$ จะได้

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{-jn2\pi} (e^{-jn\pi/2} - e^{+jn\pi/2}) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ even, } n \neq 0 \\ (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

หาค่าเฉลี่ย

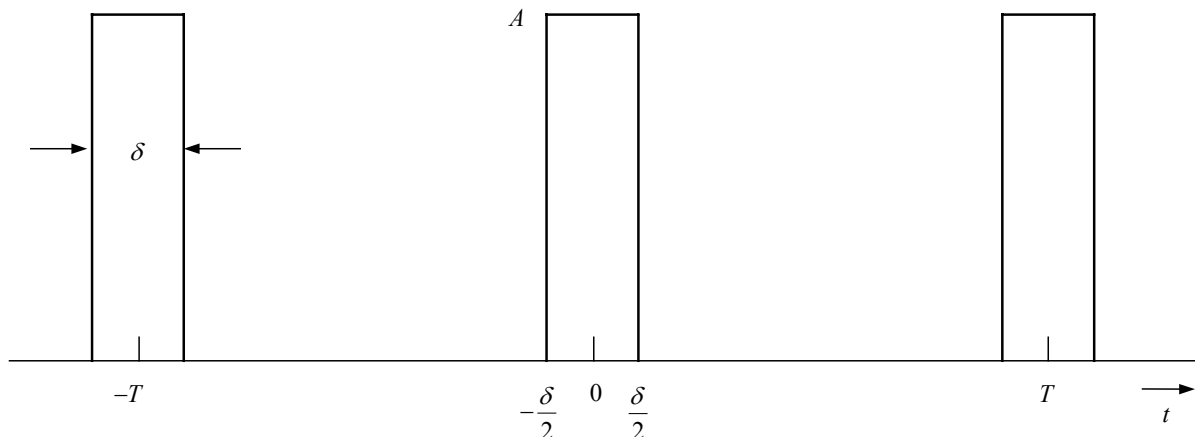
$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 1 dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

12.4 ฟูเรียสเปกตรัม

ถ้าเราเขียนกราฟของค่าสัมประสิทธิ์เชิงซ้อน C_n เทียบกับความถี่เชิงมุม ω เราจะได้ฟูเรียสเปกตรัม (Fourier Spectrum) เนื่องจาก C_n อาจเป็นจำนวนเชิงซ้อนดังนั้นจะเขียน

$$C_n = |C_n| \angle \theta_n$$

และเราจะแยกเขียนกราฟของขนาด $|C_n|$ เทียบกับความถี่เชิงมุม ω เรียกว่าสเปกตรัมขนาด (Amplitude Spectrum) และเขียนกราฟของมุมเฟส $\angle \theta_n$ เทียบกับความถี่เชิงมุม ω เรียกว่าสเปกตรัมเฟส (Phase Spectrum) ฟูเรียสเปกตรัมจะมีอยู่ทีค่าความถี่มูลฐานและฮาร์โมนิกส์เท่านั้นจึงถูกเรียกว่าเป็นดิสครีต (Discrete) หรือเป็นเส้นสเปกตรัม (Line Spectrum) กราฟของว่าสเปกตรัมขนาดจะปรากฏเป็นเส้นในแนวตั้งที่อยู่ห่างกันเป็นค่าสม่ำเสมอ โดยมีความสูงตามค่าขนาดขององค์ประกอบความถี่นั้น ในทำนองเดียวกันสเปกตรัมเฟสก็จะปรากฏเป็นเส้นในแนวตั้งที่อยู่ห่างกันเป็นค่าสม่ำเสมอ โดยมีความสูงตามค่าเฟสขององค์ประกอบความถี่นั้น คำว่าสเปกตรัมถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดยนิวตันในการศึกษาการแยกแสงออกเป็นองค์ประกอบที่ความถี่ต่างๆของปริซึม



รูปที่ 12.3 รูปคลื่นพัลส์ซึ่งมีความกว้างพัลส์ δ

พิจารณารูปคลื่นพัลส์ซึ่งมีความกว้างพัลส์ δ มีอัตราซ้ำทุกๆ T s ดังแสดงในรูปที่ 12.3 เราจะหาค่าสัมประสิทธิ์เชิงซ้อน C_n และเขียนกราฟสเปกตรัมขนาดและสเปกตรัมเฟสของรูปคลื่นนี้ เริ่มจากค่าสัมประสิทธิ์เชิงซ้อน

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt$$

สำหรับ $n \neq 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{A}{T} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{-jn\omega_0 t} dt \\
&= \frac{-A}{jn\omega_0 T} \left(e^{-jn\omega_0 \delta/2} - e^{jn\omega_0 \delta/2} \right) \\
&= \frac{2A}{n\omega_0 T} \sin\left(\frac{n\omega_0 \delta}{2}\right)
\end{aligned}$$

หรือเขียนใหม่ในรูป

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{A\delta}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \delta/2)}{(n\omega_0 \delta/2)} \\
&= \frac{A\delta}{T} \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

โดยที่ $x = n\omega_0 \delta/2$ เมื่อ $n = 0$ เราได้

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} A dt = \frac{A\delta}{T}$$

จากกฎของโลปีตาล (*L'Hôpital's Rule*) เราทราบว่า

$$L'Hôpital's Rule \begin{cases} \frac{\sin x}{x} = 1 & \text{for } x = 0 \\ \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0 & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

เราเขียนกราฟขนาด $|C_n|$ เทียบกับความถี่เชิงมุม $\omega = n\omega_0$ สำหรับค่า $n = \pm 15$ ในรูปที่ 12.4 (ก) เทียบกับกรอบของฟังก์ชัน $|\sin x/x|$ สังเกตว่า $|C_n| = 0$ เมื่อ $n\omega_0 \delta/2 = n\pi$ หรือ

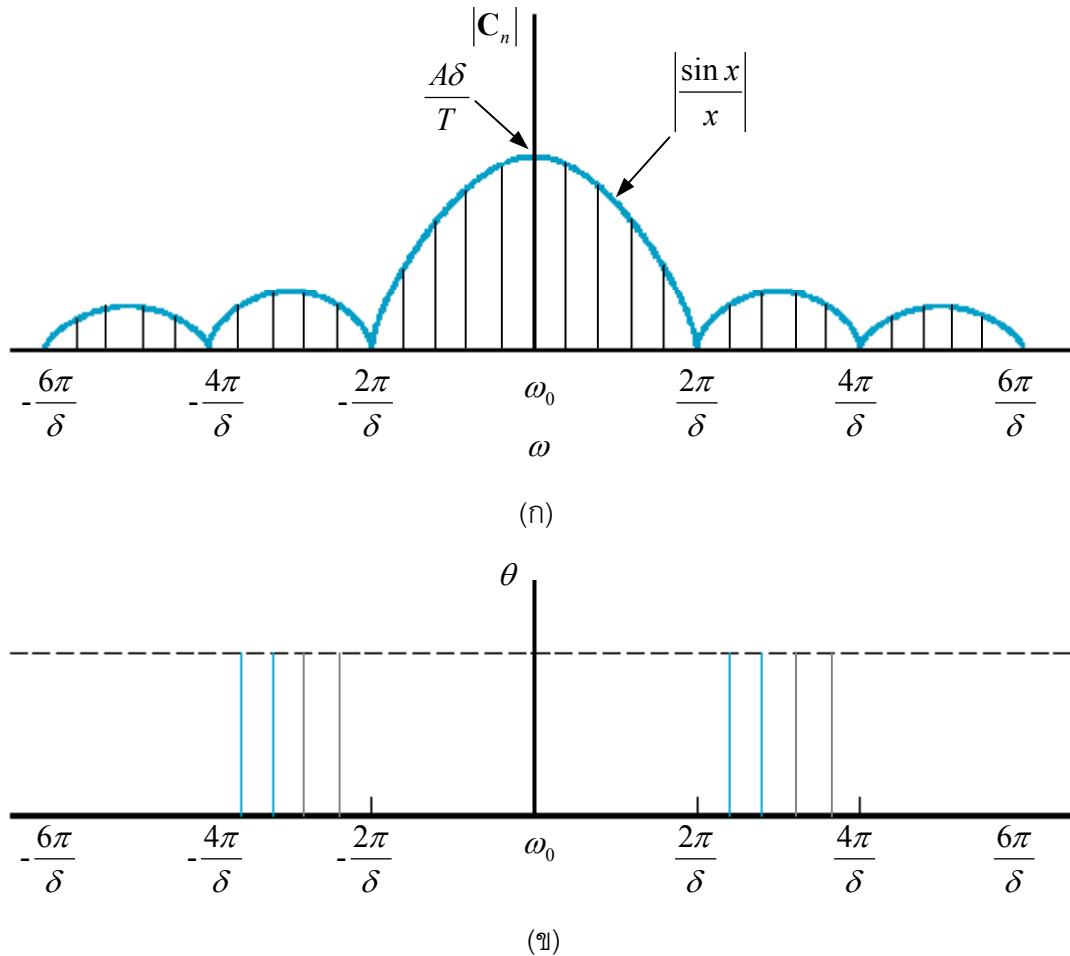
$$\frac{2\pi\delta}{2T} = \pi$$

ในกรณีนี้ $\delta/T = 1/5$ ดังนั้น $|C_n| = 0$ เมื่อ $\omega = 5\omega_0$ $\omega = 10\omega_0$ ไปเรื่อยๆ ถ้าค่าอัตราส่วน δ/T ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม จะได้ว่าขนาด $|C_n|$ ยังคงอยู่ในกรอบฟังก์ชัน $|\sin x/x|$ แต่จะไม่มีค่าเส้นสเปกตรัมใดเป็นศูนย์เลย

กราฟสเปกตรัมเฟสสามารถเขียนได้ดังแสดงในรูปที่ 12.4 (ข) ซึ่งจะเห็นว่าในช่วงความถี่ $\omega_0 \leq \omega \leq 2\pi/\delta$ มุมเฟสมีค่าเป็นศูนย์ ส่วนในช่วง $2\pi/\delta \leq \omega \leq 4\pi/\delta$ มุมเฟสมีค่าเป็น π เรเดียน

พิจารณาในกรณีที่เรากำหนดความกว้างของพัลส์ δ แต่ปรับค่าคาบ T เมื่อค่าคาบเพิ่มขึ้นจะได้ว่า

1. ขนาดของสเปกตรัมจะลดลง คือจะแปรกับ $1/T$ โดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง ซึ่งหมายความว่ารูปร่างของสเปกตรัมจะไม่ขึ้นอยู่กับการปรับค่าคาบ
2. ค่าระยะห่างของเส้นสเปกตรัม $\Delta\omega$ จะลดลงคือแปรตาม $2\pi/T$



รูปที่ 12.4 (ก) กราฟสเปกตรัมขนาด $|C_n|$ เทียบกับความถี่เชิงมุม $\omega = n\omega_0$ (ข) กราฟสเปกตรัมเฟส แต่ในกรณีที่เราคงค่าคาบไว้และเปลี่ยนค่าความกว้างของพัลส์แทน โดยที่มีข้อจำกัดว่า $\delta < T/2$ จะได้ว่าเมื่อค่าความกว้างของพัลส์เพิ่มขึ้น

1. ขนาดของสเปกตรัมจะเพิ่มขึ้น คือจะแปรกับ δ โดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง ซึ่งหมายความว่ารูปร่างของสเปกตรัมจะไม่ขึ้นอยู่กับความกว้างของพัลส์เช่นเดียวกัน
2. ค่าระยะห่างของเส้นสเปกตรัม $\Delta\omega$ จะลดลงคือองค์ประกอบความถี่ต่างๆ จะถูกบีบให้ปรากฏอยู่ในช่วงความถี่ที่แคบลง วิธีวัดการกระจายขององค์ประกอบความถี่อย่างง่ายวิธีหนึ่งคือการดูค่าความถี่ซึ่งขนาดมีค่าเป็นศูนย์ครั้งแรก

12.5 อนุกรมฟูเรียร์ที่มีจำนวนพจน์จำกัด

ในทางปฏิบัติการแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมฟูเรียร์ เราจะต้องตัดบางองค์ประกอบความถี่ทิ้งไป นั่นคือเราจะใช้จำนวนพจน์จำนวนจำกัดในอนุกรมฟูเรียร์ ดังนั้นค่าฟังก์ชัน $f(t)$ จะถูกแทนด้วยค่าประมาณจากผลรวม N พจน์

$$f(t) \cong \sum_{n=-N}^N C_n e^{jn\omega_0 t} = S_N(t) \quad (12.14)$$

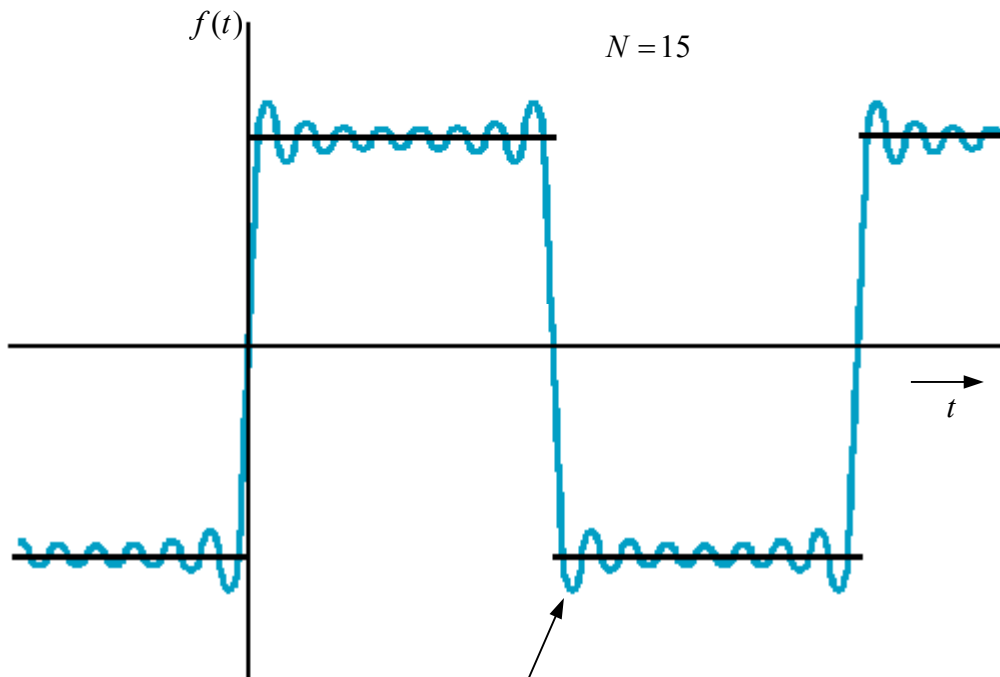
ค่าผิดพลาดสำหรับ N พจน์คือ

$$\varepsilon(t) = f(t) - S_N(t) \quad (12.15)$$

ถ้าเราใช้ค่าผิดพลาดเฉลี่ยกำลังสอง (Mean-Square Error, MSE) ตามนิยาม

$$MSE = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad (12.16)$$

จะได้ว่าค่าผิดพลาดเฉลี่ยกำลังสองจะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อเราแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมฟูเรียร์ อย่างไรก็ตามเมื่อเราตัดบางพจน์ออก คือเมื่อ $N < \infty$ จะเกิดค่าผิดพลาดขึ้น เช่นถ้า $N = 15$ จะได้รูปคลื่นสี่เหลี่ยมในรูปที่ 12.5 ซึ่งจะเห็นได้ว่าเกิดความผิดพลาดในลักษณะออสซิลเลชัน และมีค่าพุ่งเกิน (Overshoot) เกิดขึ้นที่ตำแหน่งที่มีความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชัน นักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกันคือ กิบบส์ได้ศึกษาปรากฏการณ์นี้และสรุปไว้ว่า ค่าพุ่งเกินจะคงค่าที่ประมาณ 10 % ไม่ว่าจำนวนพจน์ N จะเป็นเท่าไร คุณสมบัตินี้เรียกว่า ปรากฏการณ์ของกิบบส์ (Gibbs Phenomenon)



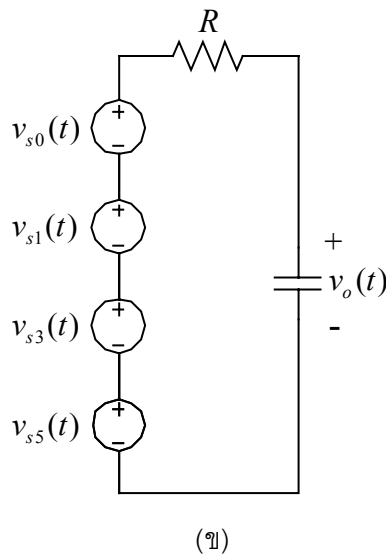
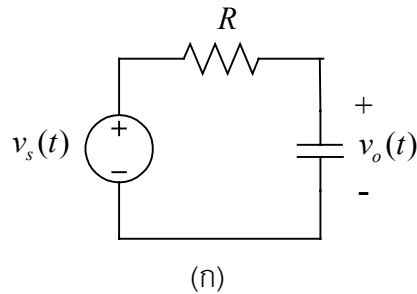
Gibbs Phenomenon

รูปที่ 12.5 รูปคลื่นสี่เหลี่ยมแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ที่มีค่า $N = 15$

12.6 การประยุกต์ใช้ออนุกรมฟูเรียร์ในวงจรไฟฟ้า

ในการวิเคราะห์วงจรที่ถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณฟังก์ชันคาบ $v_s(t)$ เราสามารถแทน $v_s(t)$ ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ แล้วหาผลตอบสนองของวงจรต่อสัญญาณมูลฐานและฮาร์โมนิกส์ต่างๆ ถ้าวงจรเป็นวงจรเชิง

เส้นซึ่งสามารถใช้หลักการทับซ้อนได้ เราจะได้ผลตอบสนองสุทธิคือผลรวมของผลตอบสนองต่อ ค่าเฉลี่ย (หรือค่าพจน์กระแสดตรง) สัญญาณมูลฐานและฮาร์โมนิกแต่ละฮาร์โมนิก



รูปที่ 12.6 (ก) วงจร RC ถูกกระตุ้นด้วยแหล่งจ่าย $v_s(t)$

(ข) วงจรสมมูลของแหล่งจ่ายแทนโดยสี่พจน์แรกของอนุกรมฟูเรียร์

พิจารณาตัวอย่างวงจร RC ในรูปที่ 12.6 (ก) เราต้องการหาค่าผลตอบสนองในสภาวะคงตัวคือแรงดันออก $v_o(t)$ ซึ่งจะได้ทำได้โดยการแตกแหล่งจ่าย $v_s(t)$ ออกเป็นส่วนย่อยโดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ กำหนด $R=1\ \Omega$ $C=2\ \text{F}$ และ $T=\pi\ \text{s}$ จะได้จากตัวอย่าง 12.1 ว่า

$$v_s(t) \cong \frac{1}{2} + \sum_{n=1, \text{odd}}^N \frac{2(-1)^q}{\pi n} \cos n\omega_0 t$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ และ $q = (n-1)/2$

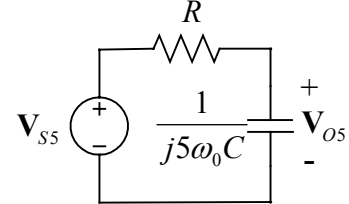
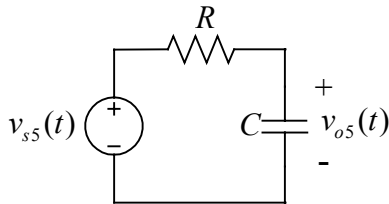
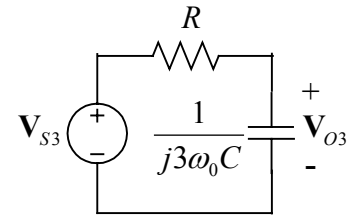
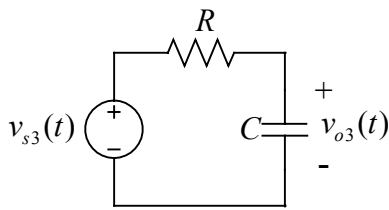
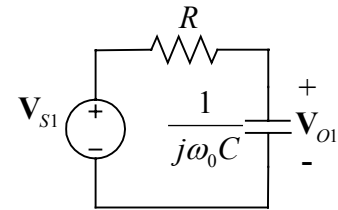
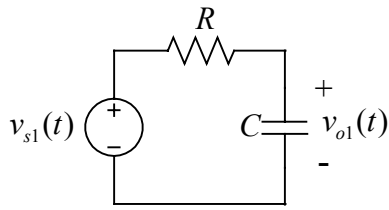
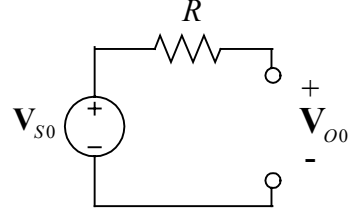
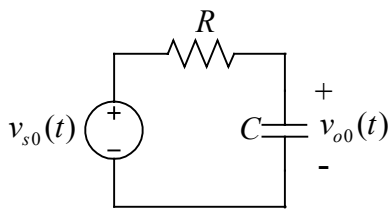
จากค่า $\omega_0 = 2\ \text{rad/s}$ จะได้สี่พจน์แรกของ $v_s(t) = v_{s0}(t) + v_{s1}(t) + v_{s3}(t) + v_{s5}(t)$ ได้

$$v_s(t) \cong \underbrace{\frac{1}{2}}_{v_{s0}(t)} + \underbrace{\frac{2}{\pi} \cos 2t}_{v_{s1}(t)} - \underbrace{\frac{2}{3\pi} \cos 6t}_{v_{s3}(t)} + \underbrace{\frac{2}{5\pi} \cos 10t}_{v_{s5}(t)}$$

รูปที่ 12.6 (ข) แสดงการใช้หลักการซูเปอร์โพสิชันในตัวอย่างนี้ ซึ่งจากการเขียนแหล่งจ่าย $v_s(t)$ เป็นแหล่งจ่ายสี่แหล่งจ่ายต่ออนุกรมกัน ทำให้สามารถแยกวงจรเป็นสี่วงจรย่อยซึ่งสามารถทำการวิเคราะห์

ได้โดยอาศัยเฟสเซอร์ที่ความถี่นั้น ดังแสดงในรูปที่ 12.6 (ค) โดยอาศัยหลักการซูเปอร์โพสิชัน ผลตอบสนองสุทธิจะได้จากการรวมผลตอบสนองจากวงจรย่อยทั้งสี่

$$v_o(t) = v_{o0}(t) + v_{o1}(t) + v_{o3}(t) + v_{o5}(t)$$



(ค)

(ง)

รูปที่ 12.6 (ค) ใช้หลักการซูเปอร์โพสิชันพิจารณาแต่ละแหล่งจ่ายแยกกัน

(ง) ใช้เฟสเซอร์ในการหาผลตอบสนองของแต่ละแหล่งจ่าย

ในรูปที่ 12.6 (ง) จะเป็นวงจรย่อยทั้งสี่ในโดเมนเวลา โดยที่ค่าอิมพีแดนซ์ของตัวเก็บประจุคือ

$$Z_C = \frac{1}{jn\omega_0 C} \text{ สำหรับ } n = 0, 1, 3, 5, \dots$$

แต่ละวงจรย่อยจะตรงกับค่า n แต่ละค่า สังเกตว่าเมื่อ $n = 0$ จะได้ $Z_C = \infty$ ตัวเก็บประจุจะถูกแทนด้วยเปิดวงจร ค่าเฟสเซอร์ของแรงดันออกได้จากการแบ่งแรงดัน

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{\frac{1}{jn\omega_0 C}}{R + \frac{1}{jn\omega_0 C}} \mathbf{V}_{sn} \quad \text{สำหรับ } n = 0, 1, 3, 5, \dots$$

เมื่อ $\mathbf{V}_{on}$ คือเฟสเซอร์ของ $v_{on}(t)$ และ $\mathbf{V}_{sn}$ คือเฟสเซอร์ของ $v_{sn}(t)$

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{1 + jn\omega_0 CR} \quad \text{สำหรับ } n = 0, 1, 3, 5, \dots$$

แทนค่า $\omega_0 CR = 4$ จะได้

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{1 + j4n} \quad \text{สำหรับ } n = 0, 1, 3, 5, \dots$$

เขียนผลตอบสนองในโดเมนเวลาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} v_{on}(t) &= |\mathbf{V}_{on}| \cos(n\omega_0 t + \angle \mathbf{V}_{on}) \\ &= \frac{|\mathbf{V}_{sn}|}{\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(n\omega_0 t + \angle \mathbf{V}_{sn} - \tan^{-1} 4n) \end{aligned}$$

ในตัวอย่างนี้

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}_{s0}| &= \frac{1}{2} \\ |\mathbf{V}_{sn}| &= \frac{2}{n\pi} \quad n = 1, 3, 5 \\ \angle \mathbf{V}_{sn} &= 0 \quad n = 0, 1, 3, 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} v_{o0}(t) &= \frac{1}{2} \\ v_{on}(t) &= \frac{2}{n\pi\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(n2t - \tan^{-1} 4n) \quad n = 1, 3, 5 \end{aligned}$$

แทนค่า n จะได้

$$\begin{aligned} v_{o1}(t) &= 0.154 \cos(2t - 76^\circ) \\ v_{o3}(t) &= 0.018 \cos(6t - 85^\circ) \\ v_{o5}(t) &= 0.006 \cos(10t - 87^\circ) \end{aligned}$$

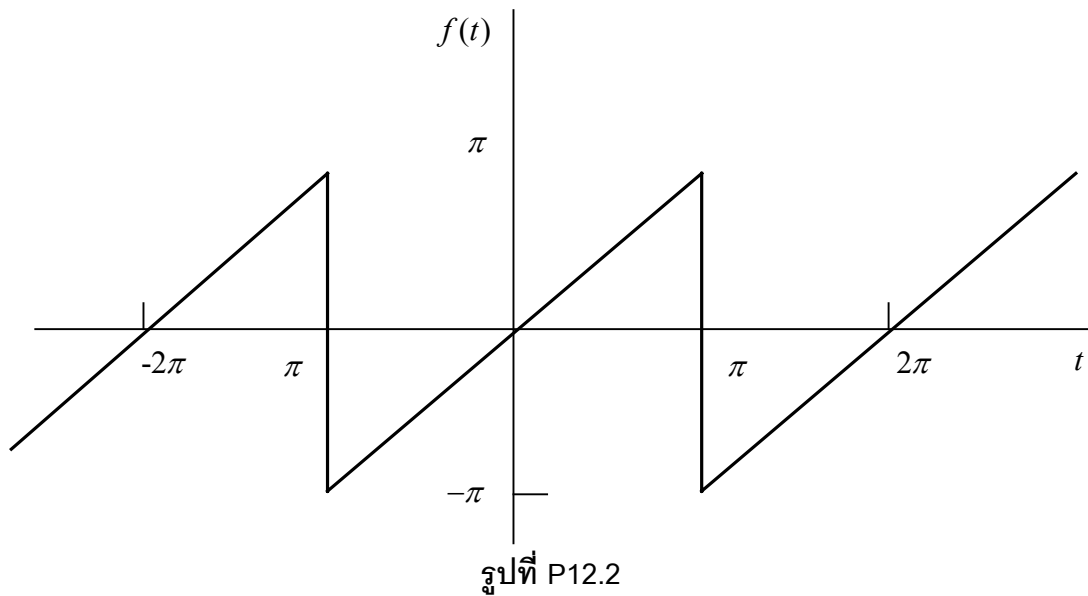
และสุดท้ายจะได้ผลตอบสนองของวงจรเริ่มต้นในรูปที่ 12.6 (ก) จากการรวมผลตอบสนองของ วงจรย่อยสี่วงจร

$$v_o(t) = \frac{1}{2} + 0.154 \cos(2t - 76^\circ) + 0.018 \cos(6t - 85^\circ) + 0.006 \cos(10t - 87^\circ)$$

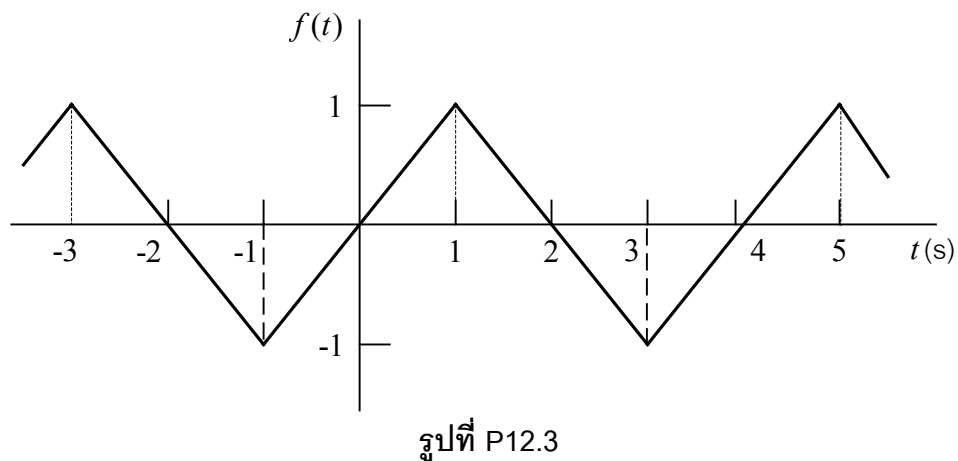
ควรสังเกตว่าเรารวมผลตอบสนองในโดเมนเวลา เนื่องจากจะไม่มีคามหมายที่จะทำการรวมผลเฟสเซอร์ที่มีความถี่ต่างกัน

12.7 แบบฝึกหัดท้ายบท

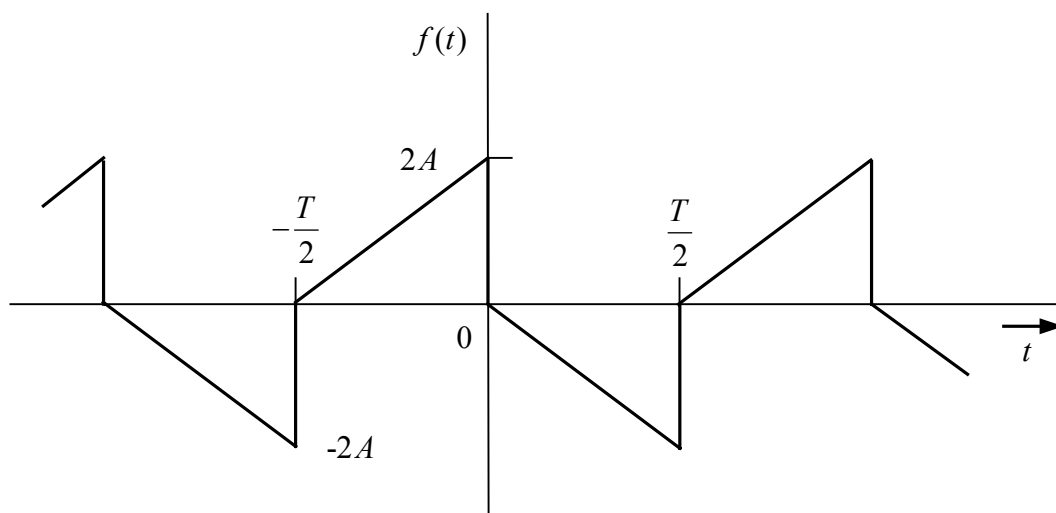
1. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปตรีโกณของฟังก์ชัน $f(t) = |A \sin \omega t|$
2. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปตรีโกณของฟังก์ชัน $f(t)$ ดังแสดงในรูป P12.2



3. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอกโปเนนเชียลของฟังก์ชัน $f(t)$ ดังแสดงในรูป P12.3

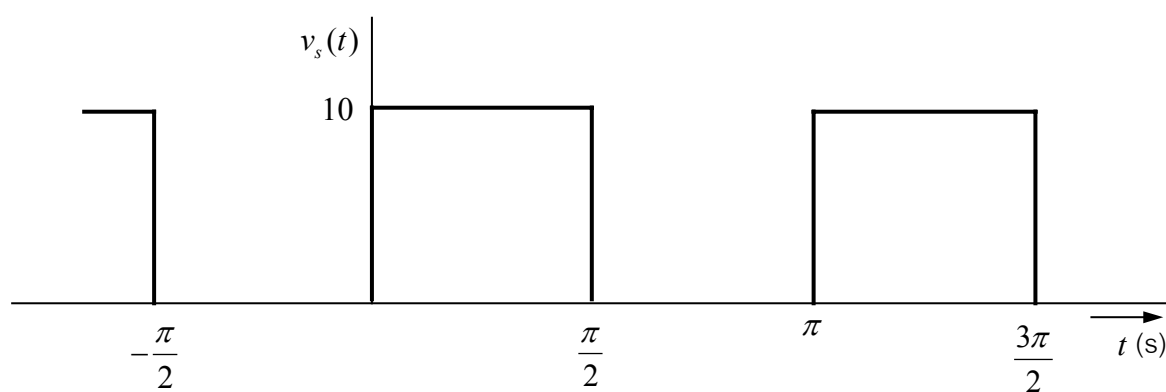


4. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปตรีโกณของฟังก์ชัน $f(t)$ ดังแสดงในรูป P12.4 แล้วเขียนฟูเรียร์สเปกตรัมทั้งขนาดละเฟสของสี่พจน์แรก

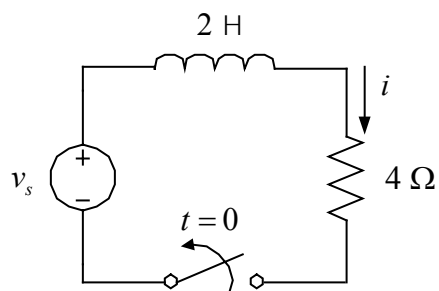


รูปที่ P12.4

5. เมื่อป้อนแหล่งจ่ายแรงดันรูปคลื่นสี่เหลี่ยมดังแสดงในรูป P12.5 (ก) ให้กับวงจร RL ในรูป P12.5 (ข) จงใช้การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมฟูเรียร์ในการหาค่ากระแส $i(t)$



(ก)



(ข)

รูปที่ P12.5