วิธีทำ เขียนเฟสเซอร์ของแหล่งจ่ายแรงดัน

$$\begin{aligned} v_s &= 100\cos 1000t \quad \text{V} \\ &= 100\angle 0° \end{aligned}$$

เขียนสมการเมช และแก้สมการหาค่าเฟสเซอร์ของกระแสจะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\omega) &= \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}} \\ &= 7.07\angle -45° \end{aligned}$$

จากกฎของโอห์มจะได้เฟสเซอร์แรงดันของแต่ละองค์ประกอบดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_R(\omega) &= R\mathbf{I}(\omega) = 70.7\angle -45° \\ \mathbf{V}_L(\omega) &= j\omega L\mathbf{I}(\omega) = 141.4\angle 45° \\ \mathbf{V}_C(\omega) &= \frac{-j}{\omega C}\mathbf{I}(\omega) = 70.7\angle -135° \end{aligned}$$

พิจารณาแหล่งจ่ายแรงดัน ซึ่งมีทิศทางของเฟสเซอร์กระแสและแรงดันไม่เป็นไปตามสัญนิยมเครื่องหมายพาสซีฟ จะได้กำลังเชิงซ้อนที่จ่ายออกจากแหล่งจ่าย

$$\mathbf{S}_V = \frac{\mathbf{V}_s\mathbf{I}^*}{2} = 353.5\angle 45° \text{ VA}$$

ส่วนองค์ประกอบอื่นๆ มีทิศทางของเฟสเซอร์กระแสและแรงดันเป็นไปตามสัญนิยมเครื่องหมายพาสซีฟ จะได้กำลังเชิงซ้อนที่ตัวต้านทานได้รับ

$$\mathbf{S}_R = \frac{\mathbf{V}_R\mathbf{I}^*}{2} = 250\angle 0° \text{ VA}$$

และกำลังเชิงซ้อนที่ตัวเหนี่ยวนำได้รับ

$$\mathbf{S}_L = \frac{\mathbf{V}_L\mathbf{I}^*}{2} = 500\angle 90° \text{ VA}$$

และกำลังเชิงซ้อนที่ตัวเก็บประจุได้รับ

$$\mathbf{S}_C = \frac{\mathbf{V}_C\mathbf{I}^*}{2} = 250\angle -90° \text{ VA}$$

จะเห็นว่าผลรวมของกำลังเชิงซ้อนที่องค์ประกอบวงจรทั้งสามได้รับไป คือ

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_L + \mathbf{S}_C &= 250\angle 0° + 500\angle 90° + 250\angle -90° \\ &= 353.5\angle 45° = \mathbf{S}_V \end{aligned}$$

สรุปได้ว่าค่ากำลังเชิงซ้อนในวงจรนี้อนุรักษ์

ตัวอย่าง 10.7 จงตรวจสอบว่าค่ากำลังเฉลี่ยของวงจร ดังแสดงในรูป Ex 10.6 อนุรักษ์หรือไม่ เมื่อกำหนด $v_s = 100\cos 1000t$ V

วิธีทำ เขียนเฟสเซอร์ของแหล่งจ่ายแรงดัน

$$\begin{aligned} v_s &= 100\cos 1000t \quad \text{V} \\ &= 100\angle 0° \end{aligned}$$

เขียนสมการเมชและแก้สมการหาค่าเฟสเซอร์ของกระแสจะได้

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}} = 7.07\angle -45°$$

ค่ากำลังเฉลี่ยที่องค์ประกอบต่างๆ (ยกเว้นแหล่งจ่าย) ได้รับ สามารถหาได้จาก

$$P = \left(\frac{I_m^2}{2}\right)\mathrm{Re}(\mathbf{Z})$$

เนื่องจากค่า $\mathrm{Re}(\mathbf{Z}) = 0$ สำหรับตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำดังนั้นค่ากำลังเฉลี่ยของสององค์ประกอบนี้จะเป็นศูนย์ $P_L = P_C = 0$ สำหรับตัวต้านทานจะได้

$$P_R = \left(\frac{I_m^2}{2}\right)R = 250 \text{ W}$$

ค่ากำลังเฉลี่ยที่จ่ายออกจากแหล่งจ่ายคือ

$$\begin{aligned} P_V &= \mathrm{Re}\left(\mathbf{S}_V\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathbf{V}_s\mathbf{I}^*}{2}\right) \\ &= \mathrm{Re}(353.5\angle 45°) = 250 \text{ W} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลรวมของกำลังเฉลี่ยที่องค์ประกอบวงจรทั้งสามได้รับไป คือ

$$P_R + P_L + P_C = 250 + 0 + 0 = 250 = P_V$$

จึงสรุปได้ว่าค่ากำลังเฉลี่ยของวงจรนี้ก็อนุรักษ์เช่นเดียวกัน

10.6 ตัวประกอบกำลัง

ค่ากำลังเฉลี่ยที่ส่งมาจากแหล่งจ่ายกระแสไซนูซอยด์สัมพันธ์กับค่ากระแสประสิทธิผล จากตาราง 10.2 เราได้ว่าค่ากำลังเฉลี่ยที่ค่าอิมพีแดนซ์ใดๆ ได้รับในรูปของการใช้ค่ายอดคือ

$$P = \frac{I_m V_m}{2}\cos(\theta_V - \theta_I)$$

เนื่องจากค่าประสิทธิผล $V_{eff} = V_m/\sqrt{2}$ และ $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$ แทนค่าจะได้

$$P = V_{eff} I_{eff}\cos(\theta_V - \theta_I) = VI\cos(\theta_V - \theta_I)$$

เมื่อเราไม่เขียนตัวห้อยคือแทน $V_{eff} = V$ และ $I_{eff} = I$

ค่าผลคูณ VI คือค่ากำลังปรากฏ มีหน่วยเป็น โวลท์แอมป์ (VA) ผู้บริโภคกำลังไฟฟ้าโดยทั่วไปจะสนใจอัตราส่วนของค่ากำลังเฉลี่ยต่อค่ากำลังปรากฏ เรียกว่าค่าตัวประกอบกำลัง (Power Factor) pf โดยที่

$$pf = \frac{P}{VI} = \cos(\theta_V - \theta_I) \tag{10.26}$$

ค่ามุม θ จะถูกเรียกว่ามุมของตัวประกอบกำลัง (Power Factor Angle)

ดังนั้นค่ากำลังเฉลี่ยที่ค่าอิมพีแดนซ์ใดๆ จะเขียนได้เป็น

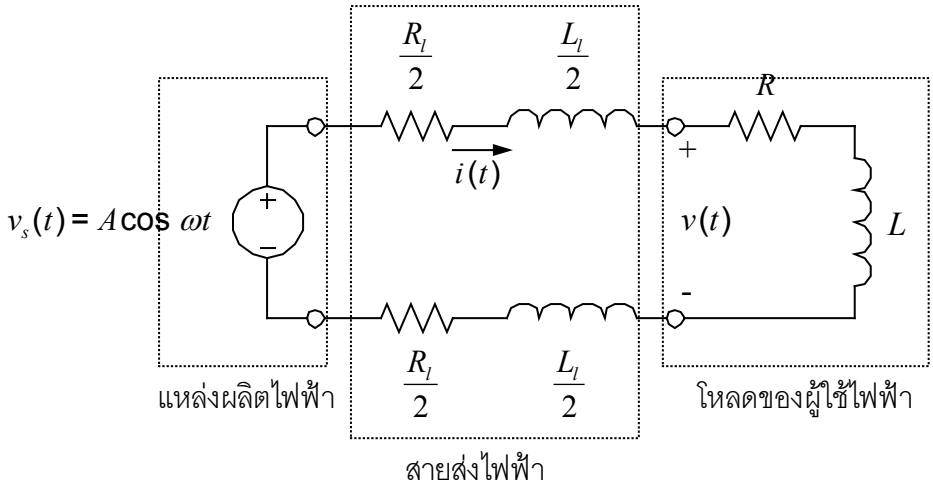
$$P = \frac{V_m I_m}{2} pf \tag{10.27}$$

ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันคู่ (Even Function) ซึ่งทำให้ $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ ดังนั้น

$$pf = \cos(\theta_V - \theta_I) = \cos(\theta_I - \theta_V)$$

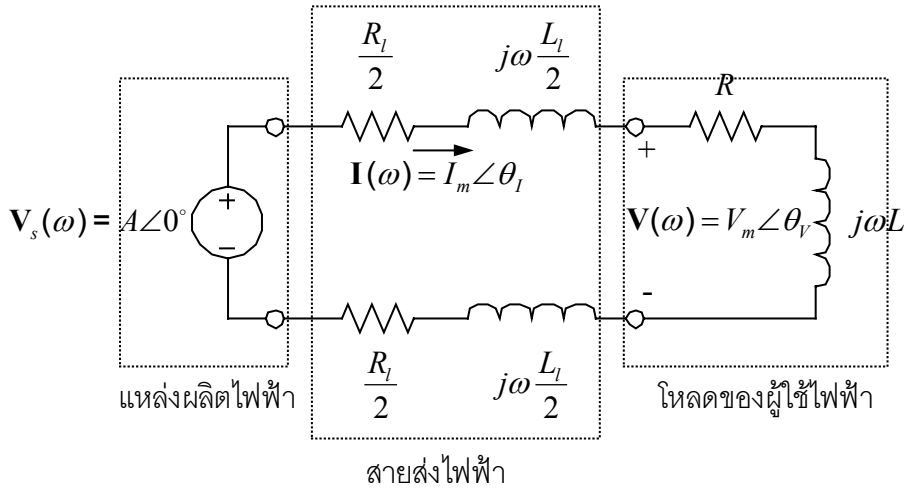
ซึ่งส่งผลให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณเล็กน้อยคือ เราจะไม่สามารถคำนวณหา $\theta_V - \theta_I$ โดยไม่มีข้อมูลเกี่ยวกับความสัมพันธ์เฟสของกระแสและแรงดัน เช่นค่า $pf = 0.8$ เราจะได้ว่า ทั้ง $\cos(36.87°) = 0.8$ และ $\cos(-36.87°) = 0.8$ ดังนั้น $\theta_V - \theta_I = 36.87°$ หรือ $\theta_V - \theta_I = -36.87°$ เราแก้ปัญหานี้โดยการเขียนกำกับว่าค่าตัวประกอบกำลังนั้นเป็น ตัวประกอบกำลังตาม (Lagging Power Factor) หรือตัวประกอบกำลังนำ (Leading Power Factor) เมื่อ $\theta_V - \theta_I > 0$ เรากล่าวว่าค่าตัวประกอบกำลังนั้นเป็นตัวประกอบกำลังตาม และเมื่อ $\theta_V - \theta_I < 0$ เรากล่าวว่าค่าตัวประกอบกำลังนั้นเป็นตัวประกอบกำลังนำ ดังนั้นหากทราบว่าเป็นค่าที่พิจารณาเป็นตัวประกอบกำลัง 0.8 ตาม จะได้ $\theta_V - \theta_I = 36.87°$ แต่ถ้าหากทราบว่าเป็นค่าที่พิจารณาเป็นตัวประกอบกำลัง 0.8 นำ จะได้ $\theta_V - \theta_I = -36.87°$

วงจรในรูปที่ 10. 7 จะแสดงให้เห็นความสำคัญของตัวประกอบกำลัง วงจรนี้คือแบบจำลองของการส่งกำลังไฟฟ้าจากแหล่งผลิตไปยังผู้ใช้ไฟฟ้า โดยที่ผู้ใช้ไฟฟ้าจะต่อโหลดเข้ากับแหล่งผลิตไฟฟ้าโดยผ่านสายส่ง โดยทั่วไปโหลดของผู้ใช้ไฟฟ้าจะมีข้อกำหนดเรื่องค่าของแรงดันไฟฟ้าที่ต้องการ ผู้ผลิตจะต้องส่งกำลังไฟฟ้าที่ผู้ใช้ไฟฟ้าต้องการรวมทั้งกำลังไฟฟ้าที่จะสูญเสียไปในสายส่ง ซึ่งจะต้องออกแบบให้มีค่าการสูญเสียในสายส่งน้อยที่สุด



รูปที่ 10.7 แบบจำลองของการส่งกำลังไฟฟ้าจากแหล่งผลิตไปยังผู้ใช้ไฟฟ้า

จากแบบจำลองวงจรในรูปที่ 10.7 เราเขียนให้อยู่ในรูปเฟสเซอร์หรือในโดเมนความถี่ได้ดังในรูปที่ 10.8 เป้าหมายของเราคือการลดการสูญเสียในสายส่งให้เหลือน้อยที่สุด โดยที่เราไม่สามารถเปลี่ยนแปลงคุณลักษณะสายส่ง คือ R_l และ L_l ได้ และในทำนองเดียวกัน เราก็ไม่สามารถเปลี่ยนค่าแรงดัน V_m และกำลังเฉลี่ยที่ผู้ใช้ไฟฟ้า P ต้องการได้ ในการวิเคราะห์ต่อไปนี้เราจะคิดค่า R_l L_l V_m และ P เป็นตัวแปร เพื่อให้สามารถนำไปใช้ได้กับกรณีทั่วไป นอกจากนี้เราจะให้ค่าตัวประกอบกำลังเป็นตัวแปรด้วย เพื่อจะแสดงให้เห็นว่าการปรับค่าตัวประกอบกำลังโดยการขนานอิมพีแดนซ์ชดเชย (Compensating Impedance) จะทำให้เราสามารถควบคุมกำลังที่โหลดของผู้ใช้ไฟฟ้าจะได้รับได้



รูปที่ 10.8 การแทนวงจรในรูปที่ 10.7 ในโดเมนความถี่

ค่าอิมพีแดนซ์ของสายส่งคือ

$$\mathbf{Z}_{LINE}(\omega) = \frac{R_l}{2} + j\omega\frac{L_l}{2} + \frac{R_l}{2} + j\omega\frac{L_l}{2}$$
$$= R_l + j\omega L_l$$

ค่ากำลังเฉลี่ยที่สายส่งได้รับคือ

$$P_{LINE} = \frac{I_m^2}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{Z}_{LINE}) = \frac{I_m^2}{2}R_l$$

เนื่องจากผู้ใช้ไฟฟ้าต้องการค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่ค่าแรงดันค่าหนึ่ง เราจะถือว่าค่าทั้งสองเป็นค่าที่ทราบค่าแล้ว จากสมการ (10.27)

$$P = \frac{V_m I_m}{2} pf$$

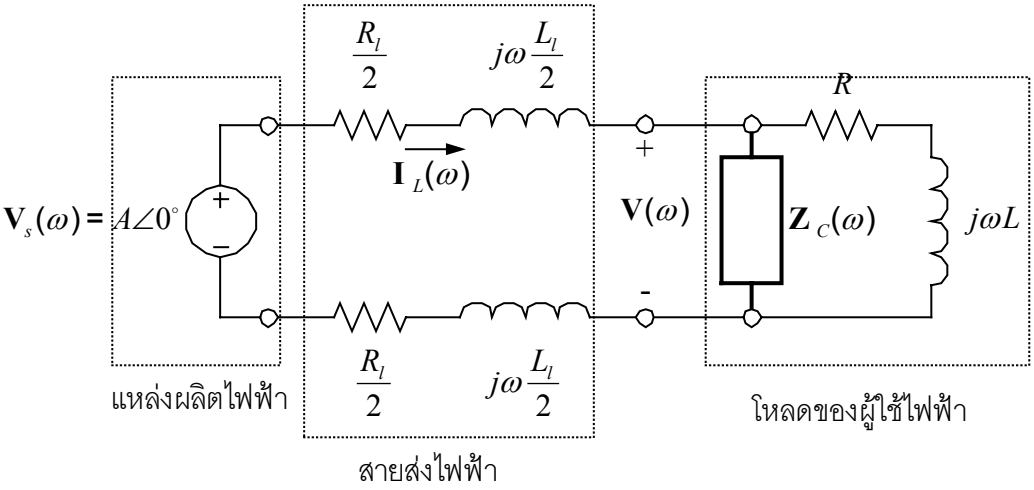
แก้สมการหาค่ากระแส

$$I_m = \frac{2P}{V_m pf}$$

ดังนั้น

$$\therefore P_{LINE} = 2\left(\frac{P}{V_m pf}\right)^2 R_l$$

การเพิ่มค่า pf จะทำให้ค่ากำลังเฉลี่ยที่สูญเสียในสายส่งลดลง ซึ่งค่าตัวประกอบกำลังก็คือค่าโคไซน์ของเฟส ซึ่งค่าสูงสุดก็คือ 1 ซึ่งจะเกิดเมื่อ θ_V เท่ากับ θ_I หรือเมื่อโหลดเป็นตัวต้านทานนั่นเอง



รูปที่ 10.9 การต่อขนานอิมพีแดนซ์ชดเชยเข้ากับโหลดของผู้ใช้ไฟฟ้า

ในรูปที่ 10.9 การต่อขนานอิมพีแดนซ์ชดเชยเข้ากับโหลดของผู้ใช้ไฟฟ้า โดยที่เราจะทำการปรับค่าอิมพีแดนซ์ชดเชยเพื่อให้ค่าตัวประกอบกำลังเข้าสู่ 1 เรียกว่าทำการแก้ไขค่าตัวประกอบกำลัง โดยตัวประกอบกำลังที่แก้ไขแล้วจะใช้สัญลักษณ์ pfc และมุมเฟสที่แก้ไขแล้วคือ θ_c โดยที่

$$pfc = \cos\theta_c$$

เราสามารถแทนอิมพีแดนซ์ของโหลดของผู้ใช้ไฟฟ้าเป็น

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

และค่าอิมพีแดนซ์ชดเชย

$$\mathbf{Z}_c = R_c + jX_c$$

เนื่องจากเราไม่ต้องการให้อิมพีแดนซ์ชดเชยได้รับกำลังเฉลี่ย ดังนั้นเราจะเลือกอิมพีแดนซ์ชดเชยเป็นองค์ประกอบรีแอกทีฟ หรือ

$$\mathbf{Z}_c = jX_c$$

ค่าผลรวมของอิมพีแดนซ์ที่ขนานกันคือ

$$\mathbf{Z}_P = \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_c} = R_P + jX_P = Z_P\angle\theta_P$$

และค่าตัวประกอบกำลังหลังการแก้ไข

$$pfc = \cos\theta_P = \cos\left(\tan^{-1}\frac{X_P}{R_P}\right)$$

ทำการคำนวณหาค่า R_P และ X_P จาก

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_P = \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_c} &= \frac{(R+jX)jX_c}{(R+jX)+jX_c} \\ &= \frac{RX_c^2 + j\left[R^2X_c + (X_c+X)XX_c\right]}{R^2+(X+X_c)^2} \\ &= \frac{RX_c^2}{R^2+(X+X_c)^2} + j\frac{R^2X_c+(X_c+X)XX_c}{R^2+(X+X_c)^2}\end{aligned}$$

อัตราส่วนของ X_P ต่อ R_P

$$\frac{X_P}{R_P} = \frac{R^2+(X_c+X)X}{RX_c}$$

จาก $pfc = \cos\left(\tan^{-1}X_P/R_P\right)$ จะได้

$$\frac{X_P}{R_P} = \tan(\cos^{-1}pfc)$$

จากสองสมการซึ่งเท่ากันจะหาค่ารีแอกแตนซ์ชดเชยได้

$$X_c = \frac{R^2+X^2}{R\tan(\cos^{-1}pfc) - X} \qquad (10.28)$$

สังเกตว่าค่ารีแอกแตนซ์ชดเชย X_c สามารถเป็นบวกหรือลบตามความต้องการของ pfc และค่าโหลดเดิม $\mathbf{Z}$ ของผู้ใช้ไฟฟ้า โดยทั่วไป ค่าโหลด $\mathbf{Z}$ ของผู้ใช้ไฟฟ้าจะเป็นอินดักทีฟโหลด ดังนั้นเราจะต้องการคาปาซิทีฟโหลดมาชดเชย จากอิมพีแดนซ์ของตัวเก็บประจุ

$$\mathbf{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = jX_C$$

ซึ่งค่า X_C จะเป็นลบ แทนค่า

$$\frac{-1}{\omega C} = \frac{R^2 + X^2}{R\tan(\cos^{-1} pfc) - X}$$

แก้สมการหาค่า ωC จะได้

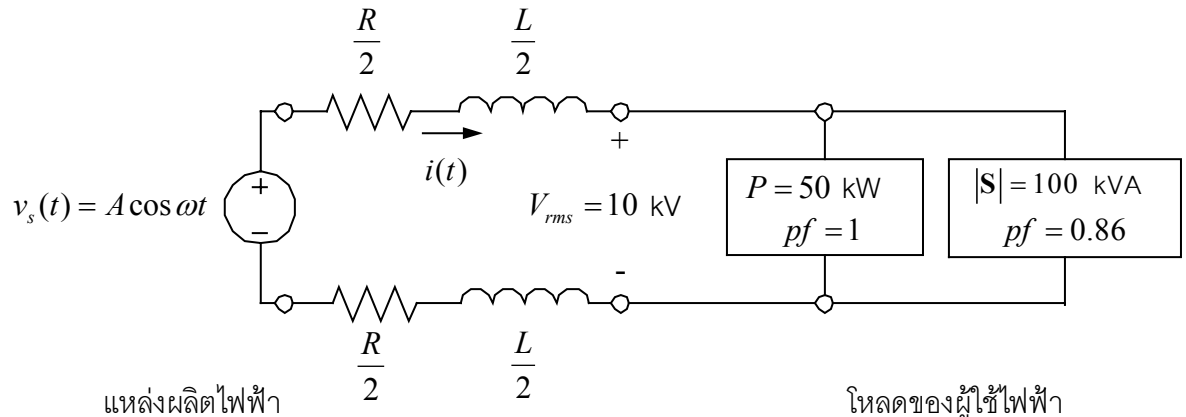
$$\begin{aligned}\omega C &= \frac{X - R\tan(\cos^{-1} pfc)}{R^2 + X^2} \\ &= \frac{R}{R^2 + X^2}\left(\frac{X}{R} - \tan(\cos^{-1} pfc)\right)\end{aligned}$$

ให้ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$ ดังนั้น

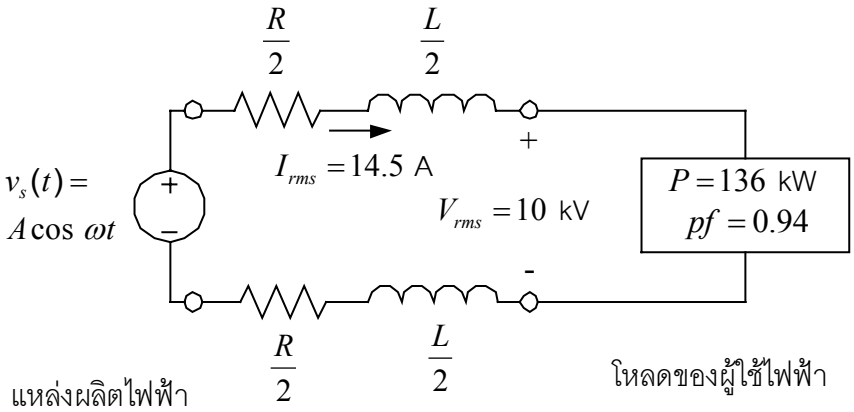
$$\omega C = \frac{R}{R^2 + X^2}\left(\tan\theta - \tan\theta_c\right)$$

เมื่อ $\theta = \cos^{-1}\left(pf\right)$ และ $\theta_c = \cos^{-1}\left(pfc\right)$

ตัวอย่าง 10.8 ผู้ใช้ไฟฟ้ารายหนึ่ง มีโหลดสองชนิดต่อขนานกันและต่อกับสายส่งจากแหล่งจ่ายไฟฟ้า โหลดชนิดแรกคือ ตัวต้านทานทำความร้อน ขนาด 50 kW และโหลดตัวที่สองคือมอเตอร์ ขนาด 100 kVA ทำงานที่ค่าตัวประกอบกำลัง 0.86 ตาม แรงดันที่จ่ายให้โหลดมีค่า 10,000 V_{rms} จงหาค่ากระแสทั้งหมดที่ไหลเข้าสู่โหลดของผู้ใช้ไฟฟ้ารายนี้ และค่าตัวประกอบกำลังรวมของโหลดทั้งสอง



(ก)



(ข)

รูปที่ Ex 10.8

วิธีทำ รูปที่ Ex 10.8 (ก) สรุปสิ่งที่เราทราบเกี่ยวกับระบบทั้งหมด

เริ่มจากการพิจารณาโหลดตัวต้านทานทำความร้อน ซึ่งจะเป็นรีซิสทีฟโหลด ไม่มีค่ารีแอกทีฟ

$$\mathbf{S}_1 = P_1 = 50 \text{ kW}$$

ส่วนโหลดมอเตอร์ มีค่าตัวประกอบกำลัง 0.86 ตาม ดังนั้น $\theta_2 > 0$

$$\theta_2 = \cos^{-1}(pf_2) = \cos^{-1}(0.86) = 30.7°$$

ค่ากำลังเชิงซ้อนที่มอเตอร์ได้รับคือ

$$\mathbf{S}_2 = |\mathbf{S}_2| \angle \theta_2 = 100 \angle 30.7° = 86 + j51 \text{ kVA}$$

ดังนั้น $P_2 = 86$ kW และ $Q_2 = 51$ kVAR ค่ากำลังเชิงซ้อนที่โหลดทั้งสองได้รับคือ

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 136 + j51 = 145.2 \angle 20.6 \text{ kVA}$$

ซึ่งได้ค่ากำลังเฉลี่ย $P = 136$ kW และ $Q = 51$ kVAR

ค่าตัวประกอบกำลังรวมของโหลดทั้งสองคือ

$$pf = \cos(20.6°) = 0.94$$

ค่ากระแสทั้งหมดที่ไหลเข้าสู่โหลดของผู้ใช้ไฟฟ้ารายนี้ หาได้จาก

$$|\mathbf{S}| = \frac{V_m I_m}{2} = V_{rms} I_{rms}$$

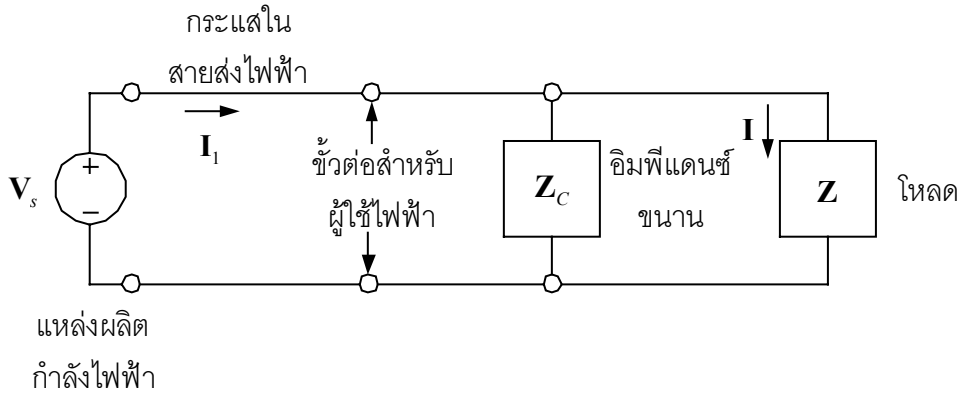
หรือ

$$I_{rms} = \frac{|\mathbf{S}|}{V_{rms}}$$
$$= \frac{145200}{10^4}$$

$$= 14.52 \quad A_{rms}$$

รูปที่ Ex 10.8 (ข) สรุปสิ่งที่เราคำนวณได้ข้างต้น

ตัวอย่าง 10.9 มีโหลดอิมพีแดนซ์ $\mathbf{Z}$=100+j100 Ω ต่อกับสายส่งจากแหล่งจ่ายไฟฟ้า ดังแสดงในรูปที่ Ex 10.9 กำหนด $\omega = 377$ rad/s จงหาค่าตัวเก็บประจุที่จะต้องนำมาต่อขนานเพื่อแก้ไขค่าตัวประกอบกำลังให้ได้ (ก) 0.95 ตาม (ข) 1.0



รูปที่ Ex 10.9

วิธีทำ ค่ามุมเฟสของอิมพีแดนซ์นี้คือ $\theta = 45°$ ดังนั้นค่าตัวประกอบกำลังจะได้

$$\cos\theta = \cos 45° = 0.707 \quad pf \quad \text{lagging}$$

(ก) เราต้องการแก้ไขค่าตัวประกอบกำลังให้ได้ 0.95 ตาม ใช้สมการ (10.28) จะได้

$$X_c = \frac{R^2 + X^2}{R\tan(\cos^{-1} pfc) - X}$$
$$= -297.9$$

ค่าตัวเก็บประจุที่ต้องการจะได้จาก

$$C = -\frac{1}{\omega X_c} = 8.9 \quad \mu F$$

(ข) ถ้าเราต้องการแก้ไขค่าตัวประกอบกำลังให้ได้ 1.0 ตาม ใช้สมการ (10.28) เช่นเดียวกันจะได้

$$X_c = \frac{R^2 + X^2}{R\tan(\cos^{-1} pfc) - X}$$
$$= -200$$

ดังนั้นค่าตัวเก็บประจุที่ต้องการคือ

$$C = -\frac{1}{\omega X_c} = 13.3 \quad \mu F$$

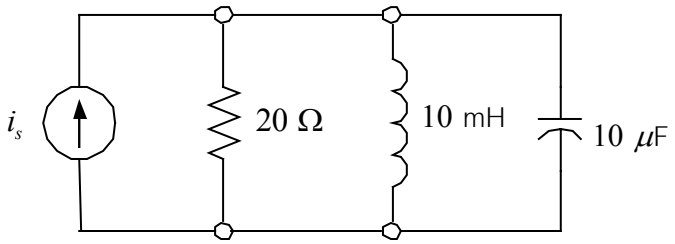
หรือหาได้จาก

$$\omega C = \frac{R}{R^2 + X^2}\left(\tan\theta - \tan\theta_c\right)$$

จะได้ $C = 13.3$ μF เช่นเดียวกัน

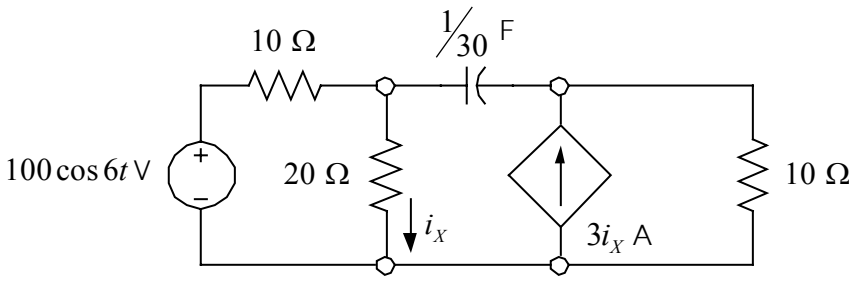
10.7 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จากวงจรในรูป P10.1 จงหาค่ากำลังชั่วขณะที่จ่ายให้กับตัวเหนี่ยวนำ เมื่อ $i_s = \cos 6283t$ A



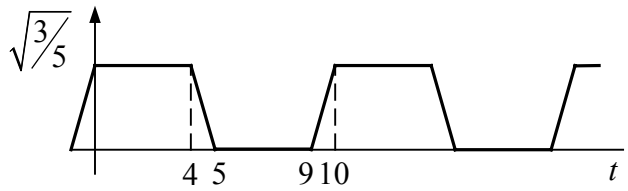
รูปที่ P10.1

2. จงใช้การวิเคราะห์โนดในการหาค่ากำลังเฉลี่ยที่จ่ายให้กับตัวต้านทาน $R = 20\,\Omega$ ในวงจรในรูป P10.2

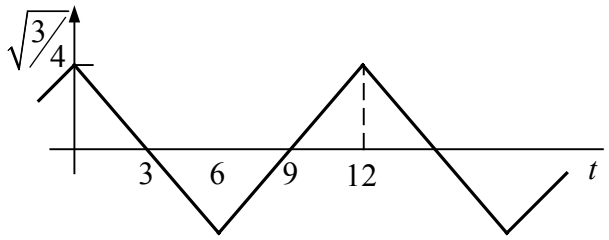


รูปที่ P10.2

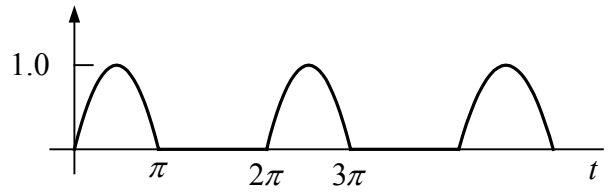
3. จงหาค่ารากของกำลังสองเฉลี่ยของรูปคลื่นในรูป P10.3 ต่อไปนี้



(ก)



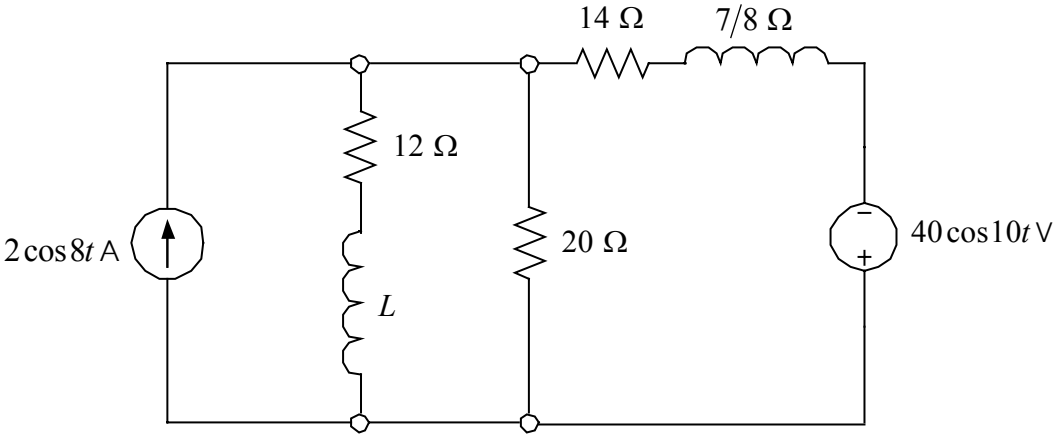
(ข)



(ค)

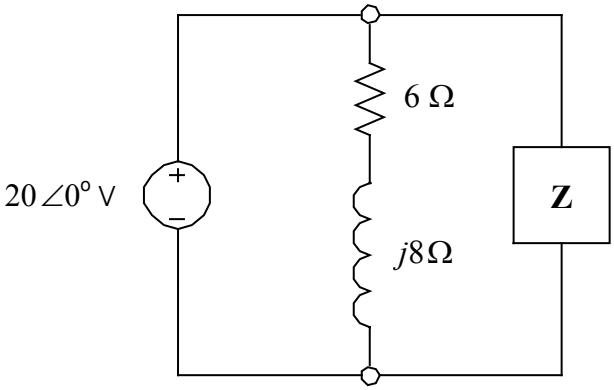
รูปที่ P10.3

4. สำหรับวงจรในรูป P10.4 จงหาค่าความเหนี่ยวนำ L ถ้าค่ากำลังเชิงซ้อนที่จ่ายโดยแหล่งจ่ายแรงดันมีค่า $50/3\angle 53.13°$ VA



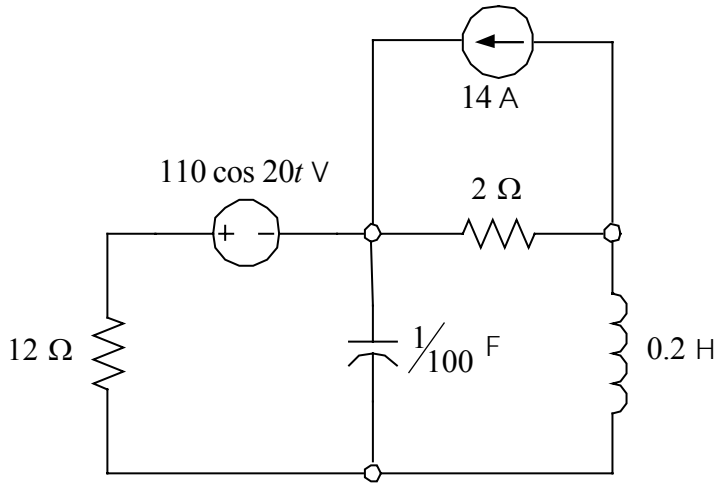
รูปที่ P10.4

5. แหล่งจ่ายแรงดันในรูป P10.5 ส่งกำลังเชิงซ้อน 50 VA ที่ตัวประกอบกำลัง 0.8 ตาม จงหาค่าอิมพีแดนซ์ $\mathbf{Z}$



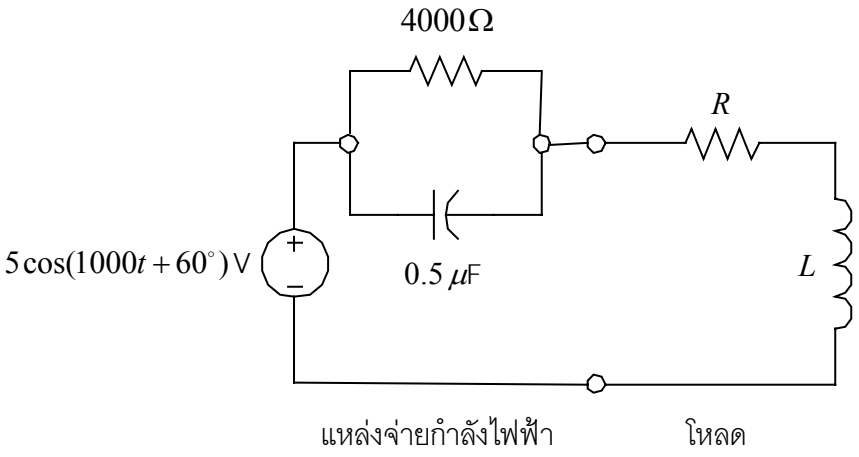
รูปที่ P10.5

6. จงหาค่ากำลังเฉลี่ยที่ตัวต้านทาน $2\ \Omega$ ได้รับ ในวงจรในรูป P10.6



รูปที่ P10.6

7. จงหาค่าของความต้านทาน R และค่าความเหนี่ยวนำ L ที่จะทำให้โหลดในวงจรในรูป P10.7 ได้รับกำลังเฉลี่ยสูงสุด



รูปที่ P10.7